# Stochastik

Boris Boor

# Inhaltsverzeichnis

# Vorwort

Die Stochastik besteht aus zwei Teilgebieten, der Statistik und der Wahrscheinlichkeits-rechnung.
Die ***Statistik*** beschreibt die Vergangenheit und verwendet Informationen, die (in realen Versuchen) tatsächlichen aufgetreten sind.
Die ***Wahrscheinlichkeitsrechnung*** „beschreibt“ die Zukunft. Sie gibt Informationen darüber, welche Werte (aufgrund bestimmter Annahmen) für zukünftige Versuche „erwartet“ werden können.
Die Stochastik wird erheblich vom ***Zufall*** beeinflusst, man spricht daher in der Stochastik oft von ***Zufallsexperimenten***. Eine zentrale Rolle spielt dabei der Begriff **„*Wahrscheinlichkeit*“**.

# S.1 Grundbegriffe

## S.1.1 Ergebnisse und Ereignisse

Das Resultat eines Zufallsexperiments wird als ***Ergebnis*** bezeichnet. Alle bei diesem Experiment möglichen Ergebnisse bilden den ***Ergebnisraum Ω*** (= die Menge aller möglichen Ergebnisse).

Bspl. Werfen eines Würfels (klassisches Unterrichts-Experiment)
mögliche Ergebnisse: Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6
d.h. Ergebnisraum $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
Der Ergebnisraum sagt noch nichts über etwaige Wahrscheinlichkeiten aus !

Es werden aber manchmal nicht nur einzelne Ergebnisse, sondern sog. ***Ereignisse*** betrachtet. Ereignisse kann man als Zusammenfassung mehrerer Ergebnisse zu einem Ganzen auffassen.

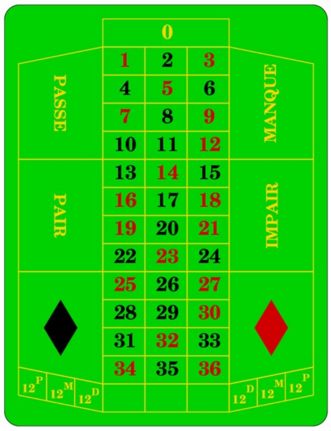
Bspl. Werfen eines Würfels
beobachtetes Ereignis: „es fällt eine gerade Zahl“,
d.h. das Ereignis $E$ besteht aus einer Menge von 3 Ergebnissen:
$E = \{ 2, 4, 6 \}$
$E$ ist eine Teilmenge vom Ergebnisraum Ω : $E \subseteq \Omega$

Beobachten wir das Ereignis „Es fällt die 4“, dann besteht das Ereignis nur aus $E = \{ 4 \}$.
Solche einelementigen Ereignisse nennt man ***Elementarereignisse***.

Beobachten wir das Ereignis „Es fällt die 7“. Dieses Ereignis kann nicht eintreten, da die 7 kein Element des Ergebnisraums Ω ist. E nennt man dann ***unmögliches Ereignis*** ( $E = \emptyset = \{ \ \}$ ).

Beobachten wir das Ereignis „Es fällt eine Zahl von 1 bis 6“, dann besteht das Ereignis aus den gleichen Elementen wie der Ergebnisraum Ω ( $E = \Omega$ ).
Dieses Ereignis nennt man ***sicheres Ereignis***.

## Vereinigung und Schnitt von Ereignissen




Beim Roulette kann man auf verschiedene Felder setzen:

- auf einzelne Zahlen (Elementarereignis)
- manque und passe (erste und zweite Hälfte)
- pair und impair (gerade und ungerade Zahlen, ohne die 0)
- rouge und noir (rote und schwarze Zahlen)
- $12^p$, $12^m$ und $12^d$ (douze premier, milieu und dernier; erstes, mittleres und letztes Dutzend)
- ... (weitere Setzmöglichkeiten) ...

Beispiel 1: Max und Moritz bilden beim Roulette ein Team. Max setzt auf die 23, Moritz auf das erste Dutzend.
a) Gib den Ergebnisraum $\Omega$ an.
b) Gib die Ereignisse $E_{Max}$ „Max gewinnt“, $E_{Moritz}$ „Moritz gewinnt“ und $E_{MM}$ „Das Team gewinnt“ als Ergebnismenge an.

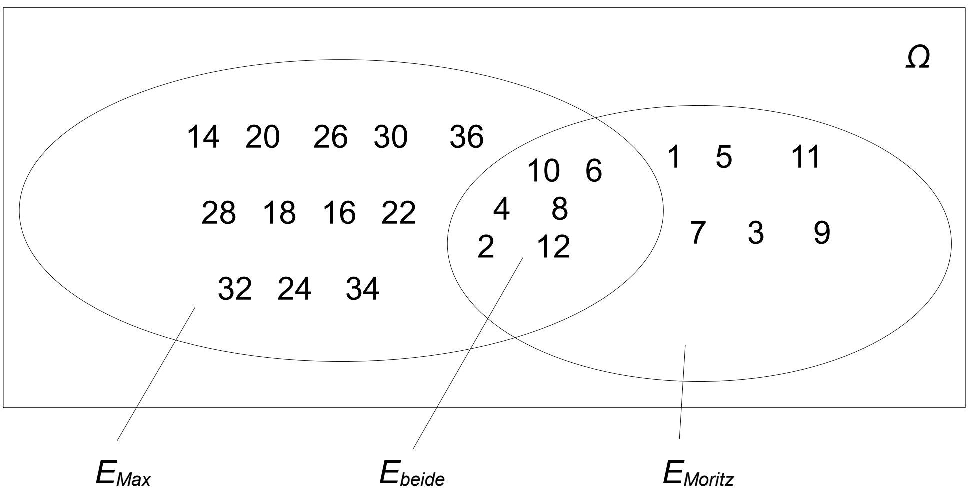
a) $\Omega = \{ 0, 1, 2, 3, 4, .... , 35, 36 \}$

b) $E_{Max} = \{ 23 \}$
$E_{Moritz} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$
Das Team gewinnt, wenn Max ***oder*** Moritz gewinnt, also wenn eine Zahl aus dem ersten Dutzend oder die 23 fällt.
$E_{MM} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 23 \} = E_{Max} \cup E_{Moritz}$
(***Vereinigungsmenge***; Symbol: $\cup$ )

Beispiel 2: Max und Moritz spielen jetzt nicht mehr als Team. Max setzt auf „pair“ (gerade Zahlen), Moritz setzt wieder auf $12^p$ (erstes Dutzend).
a) Gib die Ereignisse $E_{Max}$ „Max gewinnt“ und $E_{Moritz}$ „Moritz gewinnt“ an.
b) Gib das Ereignis $E_{beide}$ „Beide gewinnen“ an.

a) $E_{Max} = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36\}$
$E_{Moritz} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$

b) Sie gewinnen beide, wenn sowohl Max ***und*** Moritz gewinnt, also wenn eine gerade Zahl aus dem ersten Dutzend fällt.
$E_{beide} = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12 \} = E_{Max} \cap E_{Moritz}$
(***Schnittmenge***; Symbol: $\cap$ )
graph. Darstellung:



Übungsaufgaben:

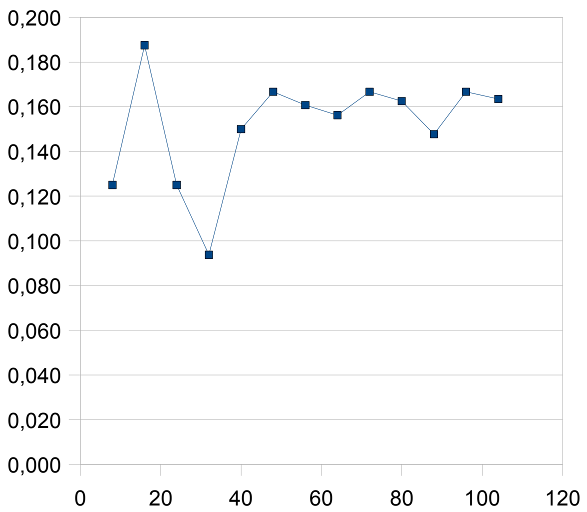
1. Max setzt auf „manque“, Moritz auf „noir“. Stelle die Ereignisse „Max gewinnt“, „Moritz gewinnt“ und „Team gewinnt“ als Ergebnismengen dar.

2. Stelle die folgenden Ereignisse als Ergebnismengen dar:
a) $E_1$: rouge (rot)
b) $E_2$: pair (gerade)
c) $E_3$: douze dernier (letztes Dutzend)
d) Bestimme die Ergebnismengen von $E_1 \cap E_2$ , $E_1 \cup E_2$ , $E_2 \cap E_3$ , $E_2 \cup E_3$ , $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ , $E_1 \cup E_2 \cup E_3$

# S.1.2 Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Versuch:
mehrmaliges Würfeln, Zählen der dabei geworfenen „6er“

| Anzahl der Würfe $n$ | Anzahl 6er $H_n(6)$ | relative Häufigkeit $h_n(6)$ |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 0,125 |
| 16 | 3 | 0,1875 |
| 24 | 3 | 0,125 |
| 32 | 3 | 0,09375 |
| 40 | 6 | 0,15 |
| 48 | 8 | 0,16666 |
| 56 | 9 | 0,16071 |
| 64 | 10 | 0,15625 |
| 72 | 12 | 0,16666 |
| 80 | 13 | 0,1625 |
| 88 | 13 | 0,14773 |
| 96 | 16 | 0,16666 |
| 104 | 17 | 0,16346 |




In einem Diagramm, in dem $h_n(6)$ über $n$ aufgetragen ist, erkennt man, dass sich die relative Häufigkeit $h(6)$ für wachsendes $n$ einem bestimmten Wert annähert. Diese Stabilisierung der relativen Häufigkeiten bezeichnet man als ***das Gesetz der großen Zahlen*** (Bernoulli 1688).
Der Stabilisierungswert, der sich für große $n$ einstellt, nennt man ***Wahrscheinlichkeit P*** des Ereignisses *A* (*P* wie Probability).

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses *A* nennt man *P(A)*.
Dabei gilt: $0 \leq P(A) \leq 1$
*P(A)* kann als Bruch oder in %-Schreibweise angegeben werden.

## S.1.3 Wahrscheinlichkeitsverteilung

Gegeben sei ein Zufallsexperiment mit dem Ergebnisraum $\Omega = \{ e_1; e_2; .... ; e_n \}$.
Eine Zuordnung, die jedem Elementarereignis $\{e_i\}$ genau eine reell Zahl $P(e_i)$ zuordnet, heißt ***Wahrscheinlichkeitsverteilung***.

Eigenschaften:

$$P(e_i) \geq 0 \quad \text{(für alle i)}$$
$$\sum_i P(e_i) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(e_i) < 1$$

$P(e_i)$ heißt ***Wahrscheinlichkeit*** des Elementarereignisses $\{e_i\}$ .

Betrachtet man ein Ereignis $E$, das aus mehreren Elementarereignissen besteht, dann gilt:

$P(E) = P(e_1) + P(e_2) + .... + P(e_k)$
$P(E) = 0$, *falls* $E = \{ \}$ (unmögliches Ereignis)
$P(E) = 1$, *falls* $E = \Omega$ (sicheres Ereignis)

Zu jedem Ereignis $E$ gibt es auch eine sogenanntes ***Gegenereignis*** $\bar{E}$ . Dieses tritt genau dann ein, wenn $E$ nicht eintritt.

Beispiel Würfeln:
$E = \{ 1, 3, 5 \}$ ungerade Zahlen. Das entsprechende Gegenereignis wären die geraden Zahlen $\{ 2, 4, 6 \}$

$$\bar{E} = \Omega \setminus E$$

Häufig verwendet man auch die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses, die sogenannte ***Gegenwahrscheinlichkeit***, um Rechnungen zu vereinfachen.

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

Betrachtet man zwei beliebige Ereignisse $E_1, E_2 \subset \Omega$ , dann gilt für die Vereinigungsmenge der beiden Ereignisse

$$\boxed{P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)}$$

<u>Aufgabe:</u> Überprüfe diese Formel anhand der Beispiele beim Roulette-Spiel (siehe oben)

$E_1$: rouge (rot) $E_1 = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36 \}$
$E_2$: pair (gerade) $E_2 = \{ 2, 4, 6, 8, .... , 34, 36\}$

Gehen wir davon aus, dass jedes Elementarereignis gleichwahrscheinlich ist, dann gilt:
$P(E_1) = 18/37$ (18 mal 1/37)
$P(E_2) = 18/37$

Addiert man einfach die beiden Wahrscheinlichkeiten, so zählt man einige Elementarereignisse doppelt, nämlich die, die sich sowohl in $E_1$ als auch in $E_2$ befinden. Alle

Elemente, die sich in beiden Ereignissen befinden, sind in der Menge $E_1 \cap E_2$ . Die Wahrscheinlichkeit dieser Menge muss also subtrahiert werden, damit jedes Elementarereignis nur einmal auftaucht.

$$E_1 \cap E_2 = \{12, 14, 16, 18, 30, 32, 34, 36\} \quad \Rightarrow \quad P(E_1 \cap E_2) = 8/37$$

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{18}{37} + \frac{18}{37} - \frac{8}{37} = \frac{28}{37}$$

(es befinden sich 28 Elementarereignisse in der Vereinigungsmenge)

<u>Übungsaufgaben:</u>

1. Bestimme $P(E_2 \cup E_3)$ und $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ für obiges Beispiel.

2. Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung beim "Lego-Würfel"

| $e_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(e_i)$ | 33,6% | 16,4% | 12,1% | 12,1% | 9,5% | 16,4% |

3. Betrachte folgende Ereignisse:

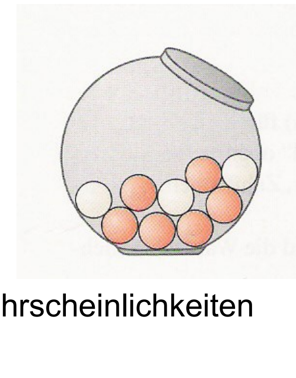
$E_1$ = gerade Zahl fällt
$E_2$ = Zahl kleiner 3 fällt
$E_3$ = Primzahl fällt
$E_4$ = Zahl größer 4 fällt

Berechne die Wahrscheinlichkeiten für diese Ereignisse, $P(E_1 \cup E_3)$ und $P(E_2 \cup E_4)$

## <u>S.1.4 Mehrstufige Zufallsexperimente</u>

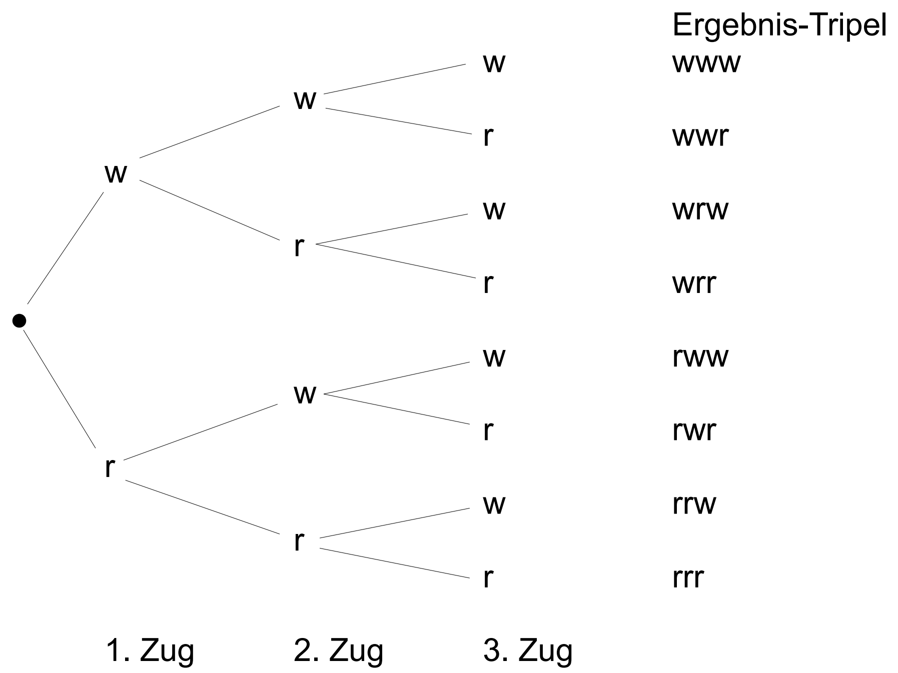
Mehrstufige Zufallsexperimente sind Experimente, die mehrere Male (*n*-mal) hintereinander ausgeführt werden. Die Ergebnisse *n*-stufiger Zufallsexperimente sind sog. ***n-Tupel*** ($e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ ), wobei $e_i$ das Ergebnis des i-ten Teilexperiments ist.

Mehrstufige Zufallsexperimente sind z.B. das mehrmalige Werfen einer Münze, das mehrmalige Würfeln oder das wiederholte Ziehen einer Kugel aus einer Urne, was ein sehr beliebtes Modell in der Stochastik ist (***Urnenmodell***).

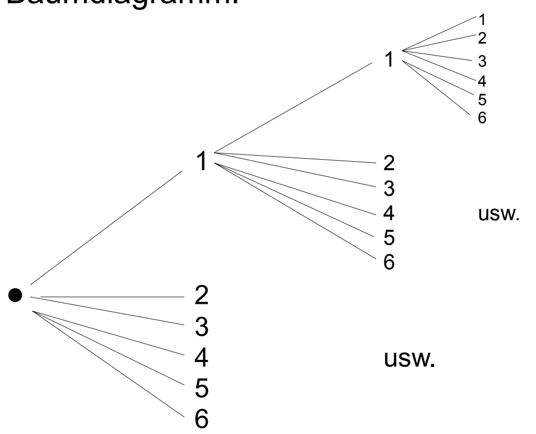


Beispiel: 3 maliges Ziehen aus der Urne
Die möglichen Ergebnisse (3-Tupel = Tripel) sind: (www), (wwr), (wrw), (wrr), (rww), (rwr), (rrw), (rrr)
Es gibt also 8 verschiedene Ergebnisse.

Um eine übersichtliche Darstellung zu haben, wählt man in der Stochastik meist das ***Baumdiagramm***. Dies hilft uns später auch, Wahrscheinlichkeiten zu berechnen.

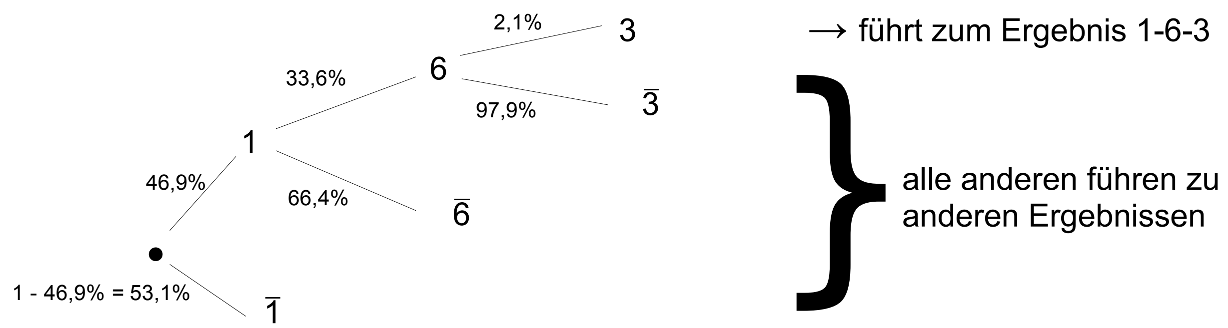



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Würfel mit dem oben genannten "Lego-Würfel" die Reihenfolge 1-6-3 zu werfen ?
Baumdiagramm:



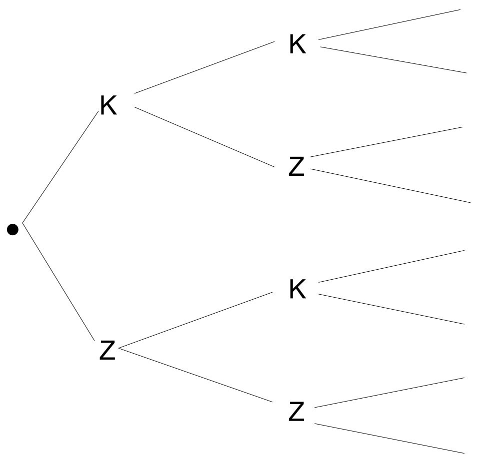

es gibt sehr viele mögliche Ergebnisse, d.h. der Baum wird schnell unübersichtlich !

<u>deshalb:</u> nur das zeichnen, was wirklich gebraucht wird: (***reduziertes*** Baumdiagramm)




Zudem gibt man entlang der ***Pfade*** an, mit welcher Wahrscheinlichkeit diese eintreten.

Aufgabe:
Werfen einer Münze (Kopf (K) oder Zahl (Z) ). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim 3maligen Werfen 3mal Kopf oder 3mal Zahl zu erhalten ?




Ergebnis-Tripel
KKK
KKZ
KZK
KZZ
ZKK
ZKZ
ZZK
ZZZ

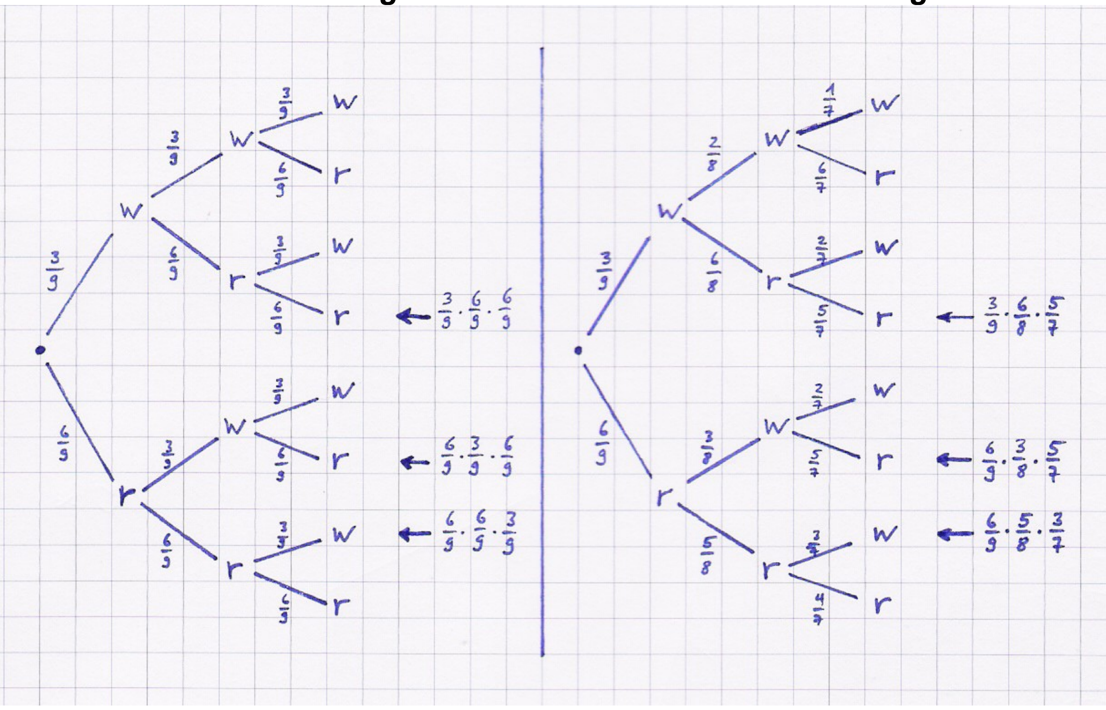
Jeder Pfad hat dabei die Wahrscheinlichkeit 50 % = ½, jedes Ergebnis-Tripel die Wahrscheinlichkeit 12,5 % = ⅛ = $(\frac{1}{2})^3$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also
*P* = ¼ ( = ⅛ + ⅛ ).

**Pfadregeln:**
1. Die Wahrscheinlichkeit eines **Ergebnisses** ist gleich dem **Produkt** aller Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades, der zum Ergebnis führt.
2. Die Wahrscheinlichkeit eines **Ereignisses** ist gleich der **Summe** aller Ergebniswahrscheinlichkeiten, die zum Ereignis dazugehören.

Aufgaben:
1. Wie groß ist Wahrscheinlichkeit, mit dem obigen Lego-Würfel, die Kombination 1-6-3 zu erhalten, unabhängig von der Reihenfolge ? Überlege Dir dazu erst alle günstigen Ergebnisse.
2. Gegeben ist ein (symmetrischer) Würfel, der 4 Einsen und 2 Sechsen trägt. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich bei 2maligem Würfeln eine gerade Augensumme ergibt.
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim 3maligen Ziehen aus der Urne (aus dem Beispiel oben) zwei rote und eine weiße Kugel zu ziehen ?

Lösungen:
1. Es gibt 6 mögliche günstige Ergebnisse = Pfade (163, 136, 316, 361, 613, 631). Jeder Pfad ist gleichwahrscheinlich, nämlich $0{,}469 \cdot 0{,}336 \cdot 0{,}021 = 0{,}0033 = 0{,}33\,\%$ . Die Gesamtwahrscheinlichkeit ist demnach $6 \cdot 0{,}0033 = 0{,}0198 \approx 2\,\%$ .
2. Der Baum besteht aus 4 Pfaden der Länge 2. Günstige Pfade sind der Pfad (1,1) und (6,6) mit den Wahrscheinlichkeiten $P(1{,}1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ und $P(6{,}6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ .
   Somit ist $P(E) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9} \approx 0{,}56 = 56\%$ .

3. Bei diesem Problem muss man unterscheiden, ob man die Kugeln nach dem Ziehen wieder zurücklegt oder draußen behält. Man unterscheidet daher zwischen dem ***Ziehen mit Zurücklegen*** und dem ***Ziehen ohne Zurücklegen***.

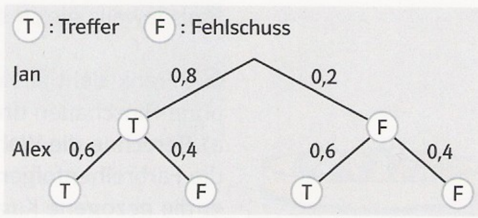



mit Zurücklegen: $P(E) = 3 \cdot \frac{108}{729} = \frac{4}{9} \approx 44{,}4\,\%$

ohne Zurücklegen: $P(E) = 3 \cdot \frac{90}{504} = \frac{15}{28} \approx 53{,}6\,\%$

<u>weitere Beispiele und Übungsaufgaben:</u>
(entnommen aus Klett: Lambacher-Schweizer 7)

**Beispiel 1** Summen- und Pfadregel
Beim Torwandschießen trifft Jan mit 80 % und Axel mit 60 % Wahrscheinlichkeit. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, dass sie zusammen keinen, 1 oder 2 Treffer erzielen?
Lösung:
Wahrscheinlichkeit für keinen Treffer: $0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$
Ein Treffer wird bei den Ergebnissen TF (erst Treffer, dann Fehlschuss) und FT (erst Fehlschuss, dann Treffer) erzielt.
Die Wahrscheinlichkeiten der beiden Ergebnisse müssen daher nach der Summenregel addiert werden.
Wahrscheinlichkeit für einen Treffer: $0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}44.$
Wahrscheinlichkeit für zwei Treffer: $0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48.$



**Beispiel 2**
Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelingt der Start beim „Mensch ärgere dich nicht"?
Lösung:

| Ergebnis | Wahrscheinlichkeit |
|---|---|
| 6 | $\frac{1}{6}$ |
| $\not 6$ 6 | $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$ |
| $\not 6$ $\not 6$ 6 | $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$ |
| Zusammen: $\frac{91}{216} \approx 42{,}1\%$ | |

Der Start gelingt mit der Wahrscheinlichkeit 42,1%.

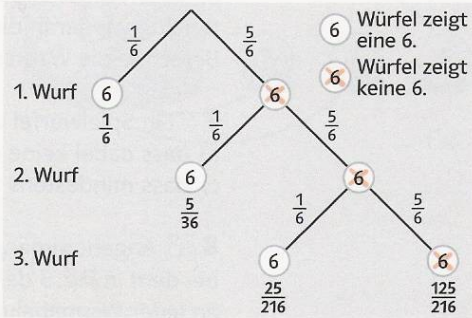


Fig. 2

## Aufgaben

**1** Herr Maier hat ein blaues, ein weißes und ein schwarzes Hemd. Außerdem besitzt er eine graue und eine blaue Hose. Stelle in einem Baumdiagramm alle Möglichkeiten dar, wie er ein Hemd mit einer Hose kombinieren kann.

**2** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der quadratische Kreisel (Fig. 3)
a) beim einmaligen Drehen auf gelb kippt?
b) beim zweimaligen Drehen jedes Mal auf gelb kippt?
c) beim dreimaligen Drehen nie auf gelb kippt?
d) beim dreimaligen Drehen zweimal auf gelb kippt?


Fig. 3

**3** Eine Münze wird dreimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) dreimal „Zahl" fällt b) einmal „Zahl" und zweimal „Wappen" fällt?
c) höchstens einmal „Zahl" fällt

**5** Bei einem Schulfest kann man bei drei verschiedenen Glücksrädern einen Preis gewinnen (Fig. 1). Bei welcher Klasse sollte man spielen, wenn der Einsatz und der Preis jeweils gleich sind?

Fig. 1

**6** Frank zieht aus der Schale in Fig. 2 ohne Hinschauen drei Kugeln.
a) Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die Farbreihenfolgen wrw, wwr, rww, wenn er die gezogene Kugel jeweils vor dem nächsten Zug wieder zurücklegt.
b) Welches Ergebnis erhält man, wenn die gezogenen Kugeln nicht zurückgelegt werden?
c) Frank bekommt ein Eis, wenn er in drei Zügen nur weiße Kugeln erwischt. Vor dem Experiment muss er sich aber festlegen, ob er eine einmal gezogene Kugeln vor dem nächsten Zug wieder in die Urne zurücklegen wird oder nicht. Wie soll er sich entscheiden? Berechne die Wahrscheinlichkeiten für „www" mit und ohne Zurücklegen.

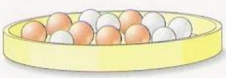


Fig. 2

**7** Ein Spielwürfel wird dreimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
a) dass dabei keine einzige Sechs auftritt b) dass nur Zahlen über 2 auftreten
c) dass mindestens zwei Einsen auftreten?

# S.2 Laplace-Experimente

## S.2.1 Laplace-Wahrscheinlichkeit

Ein Zufallsversuch heißt ***Laplace-Experiment***, wenn alle Elementarereignisse $\{e_i\}$ aus dem Ergebnisraum $\Omega$ die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen.

Besteht also der Ergebnisraum $\Omega$ aus $n$ verschiedenen Elementarereignissen, man schreibt $|\Omega| = n$ , dann gilt: $P(e_i)=\frac{1}{|\Omega|}$

Ein Ereignis $A$ tritt ein, wenn ein für $A$ günstiges Elementarereignis eintritt, d.h. wenn das entsprechende Elementarereignis ein Element der Menge $A$ ist. Besteht nun $A$ aus $m$ Elementarereignissen ( $|A| = m$), so ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A$

$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Elementarereignisse}}{\text{Anzahl aller Elementarereignisse}}}$$

Analog heißt diese Wahrscheinlichkeit ***Laplace-Wahrscheinlichkeit*** oder auch ***klassische Wahrscheinlichkeit.***
Typische Beispiele für Laplace-Experimente sind Würfeln (mit einem handelsüblichen, in der Stochstik sogenannten L-Würfel oder Laplace-Würfel), das Werfen einer Münze oder das Ziehen einer Kugel aus einer Urne.

Die Bestimmung einer Laplace-Wahrscheinlichkeit läuft also auf ein „Abzählen“ zweier Anzahlen hinaus:

1. Die Anzahl aller Elementarereignisse (also die Anzahl der Elemente in $\Omega$)
2. Die Anzahl der für das Ereignis günstigen Ergebnisse (also die Anzahl der Elemente in $A$).

Für kleine Mengen sind diese Anzahlen recht einfach zu bestimmen, für größere Mengen benötigt man jedoch ***kombinatorische Abzählverfahren***, um zum Ergebnis zu kommen.

## S.2.2 Stichproben / Abzählverfahren

Mehrstufige Zufallsexperimente können, wie bereits oben beschrieben, häufig mit dem ***Urnenmodell*** simuliert werden.

In einer Urne liegen $n$ (unterscheidbare) Kugeln, die nacheinander gezogen werden. Je nachdem, ob ***mit oder ohne Zurücklegen*** gezogen wird, bleiben die Wahrscheinlichkeiten im nächsten Zug gleich oder sie verändern sich.

Zudem muss unterschieden werden, ob die ***Reihenfolge*** der gezogenen Kugeln eine Rolle spielt oder nicht. Unter Beachtung der Zugreihenfolge spricht man von einer ***geordneten Stichprobe***, ansonsten von einer ***ungeordneten Stichprobe***.

## S.2.2.1 geordnete Stichprobe mit Zurücklegen

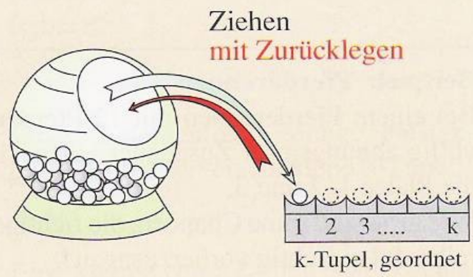
Überlegung zum Baumdiagramm:
Beim ersten Zug hat man *n* Möglichkeiten, eine Kugel zu ziehen, d.h. die erste Stufe des Baumes hat *n* Verzweigungen. Dadurch, dass die Kugel wieder zurückgelegt wird, hat man auch beim zweiten Zug wieder *n* Möglichkeiten. In der zweiten Stufe des Baumes verzweigt sich also jeder Ast wieder *n* mal. Das selbe wiederholt sich beim 3., 4., ... *k*. Zug.

Zusammenfassend kann gesagt werden:

**Ziehen mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge**
**(geordnete Stichprobe)**

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln werden nacheinander k Kugeln ***mit Zurücklegen*** gezogen. Die Ergebnisse werden in der Reihenfolge des Ziehens notiert. Dann gilt für die Anzahl N der möglichen Anordnungen (k-Tupel) die Formel

$$\mathbf{N = n^k}.$$




Beispiel:
Beim Fußballtoto müssen 13 Spielausgänge vorhergesagt werden. Eine 1 bedeutet einen Sieg der Heimmannschaft, 0 bedeutet unentschieden und bei 2 gewinnt die Gastmannschaft. Wieviele Tippreihen sind möglich ?

Modell: Urne mit 3 Kugeln „1“, „0“ und „2“. Man zieht jeweils eine Kugel, notiert ihre Zahl und legt sie wieder zurück, da ja im nächsten Spiel wieder alle drei Ausgänge möglich sein müssen.
Es ergibt sich also ein 13-stufiges Baumdiagramm, wobei sich jeder Ast jeweils in der nächsten Stufe in drei Äste aufspaltet. Insgesamt ergeben sich so also
$N = 3^{13} = 1594323$ verschiedene Tippreihen (13-Tupel).

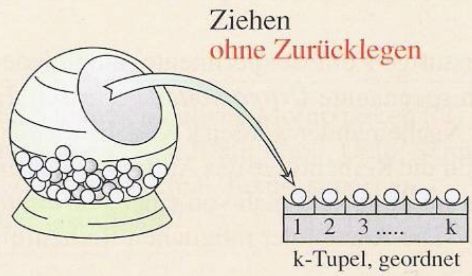
## S.2.2.2 geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen

Zum oben durchdachten Baumdiagramm gibt es in diesem Fall eine kleine, aber entscheidende Änderung:
Beim ersten Zug hat man noch *n* Möglichkeiten, eine Kugel zu ziehen, d.h. die erste Stufe des Baumes hat wieder *n* Verzweigungen. Danach wird die Kugel jedoch nicht wieder zurückgelegt. Dadurch hat man beim zweiten Zug nur noch ($n$-1) Möglichkeiten, da sich ja jetzt eine Kugel weniger in der Urne befindet. In der zweiten Stufe des Baumes verzweigt sich also jeder Ast nur noch ($n$-1) mal. Bei jedem weitern Zug verringert sich die Anzahl der Kugeln in der Urne um 1, so dass sich beim *k*. Zug nur noch ($n$-$k$+1) Kugeln in der Urne befinden.

Zusammenfassend kann gesagt werden:

**Ziehen ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge (geordnete Stichprobe)**

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln werden nacheinander k Kugeln ***ohne Zurücklegen*** gezogen. Die Ergebnisse werden in der Reihenfolge des Ziehens notiert. Dann gilt für die Anzahl N der möglichen Anordnungen (k-Tupel) die Formel




$$\mathbf{N = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}$$

Beispiel:
Beim einem Pferderennen mit 12 Pferden soll ein Tipp für die Plätze 1, 2 und 3 abgegeben werden. Wie viele verschiedene Tipps sind möglich ?

Modell: Urne mit 12 Kugeln, beschriftet von „1“ bis „12“. Man zieht jeweils eine Kugel, notiert ihre Zahl und legt sie nicht wieder zurück, da das Pferd ja bereits im Ziel ist und nicht ein zweites Mal einlaufen kann.

Es ergibt sich also ein 3-stufiges Baumdiagramm, wobei die erste Stufe 12 Äste besitzt, die sich in der zweiten jeweils in 11 Äste aufspalten, usw. Insgesamt ergeben sich so also $N = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$ verschiedene Tippreihen (3-Tupel = Tripel).

**Sonderfall:**

Wird solange aus der Urne gezogen, bis sie leer ist (ist also die Anzahl *k* der Ziehungen gleich der Anzahl *n* der Kugeln; *n* = *k*), so ergibt sich für die Anzahl der möglichen k-Tupel
$N = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \;=\; n!$

Eine solche Ziehung bis zur letzten Kugel ($n = k$) nennt man ein ***geordnete Vollerhebung*.**
Man nennt die Zahl $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ die ***Fakultät*** von $n$.

Mit Hilfe der Fakultät lässt sich die Anzahl der $k$-Tupel bei einer Ziehung aus $n$ Kugeln ohne Zurücklegen schreiben als:

$$\boxed{N = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Damit diese Formel auch für den Fall $k = n$ bzw. $k = n$-1 Gültigkeit besitzt, definiert man zweckmäßigerweise $1! = 1$ und $0! = 1$ .

Ein analoges Problem ist die unterschiedliche Anordnungen von $n$ Objekten.

Beispiel: Auf wie viele unterschiedliche Arten können eine rote, eine blaue, eine grüne und eine gelbe Kugel angeordnet werden. Auch dieses Problem kann als geordnete Vollerhebung angesehen werden. In Gedanken können die 4 Kugeln in eine Urne gepackt und nacheinander bis zur letzten gezogen werden. Es gibt also $4! = 24$ verschiedene Möglichkeiten, sogenannte ***Permutationen.***

Für die Anordnung von n verschiedenen Elementen gibt es also $n!$ Permutationen.

## S.2.2.3 ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen

Wäre das Lotto-Spielen eine geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen, d.h. müsste man zusätzlich noch die Reihenfolge der gezogenen Zahlen festlegen, so gäbe es $\frac{49!}{43!} = 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \approx 10^{10} = 10$ Mrd. Möglichkeiten. Da die Reihenfolge jedoch ***nicht*** berücksichtigt werden muss, sind also viele dieser Möglichkeiten „gleichwertig“, d.h. sie führen zum selben Ergebnis, nämlich den gleichen 6 Lottozahlen.

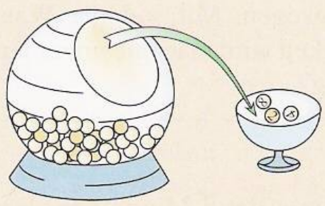
Betrachten wir also die 6 Lottozahlen. Wie viele Möglichkeiten gibt es also, diese zu ziehen ? Laut vorherigem Kapitel gibt es 6! Permutationen, also 6! = 720 Möglichkeiten, die gezogenen Zahlen anzuordnen.
Das heißt also, dass jeweils 6! = 720 der $10^{10}$ Möglichkeiten zum gleichen, ungeordneten Ergebnis führen. Wenn wir also von unserer geordneten Stichprobe zu einer ungeordneten Stichprobe übergehen, müssen wir die bisherige Anzahl der Möglichkeiten durch die Anzahl der Permutationen dividieren.

Für eine ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen gilt also: $\boxed{N = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$

Den Term auf der rechten Seite der Gleichung nennt man auch ***Binomialkoeffizient***. Man schreibt $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$ und liest „$k$ aus $n$“ der „$n$ über $k$“.

**Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge (ungeordnete Stichprobe)**

Wird aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln eine ungeordnete Teilmenge von k Kugeln entnommen, so ist die Anzahl der Möglichkeiten hierfür durch folgende Formeln gegeben:*



$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Im Fall der Lottozahlen berechnen wir also $\binom{49}{6} = \frac{49!}{43! \cdot 6!} = 13983816$ Möglichkeiten. Da es sich um ein Laplace-Experiment handelt, ist also die Wahrscheinlichkeit, „6 Richtige" zu haben, rund 1 : 14 Mio. oder 0,000007151%.

<u>Übungsaufgaben:</u>

Berechne $\binom{n}{0}$ , $\binom{n}{n}$ , $\binom{n}{1}$ und zeige, dass $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ . Was haben diese Ausdrücke für eine Bedeutung ?

Zum Namen ***Binomialkoeffizient***: siehe folgende Seite

## Binomischer Lehrsatz

Der *binomische Lehrsatz* gibt an, wie zweigliedrige Summen (Binome) potenziert werden. Er wird an dieser Stelle nur für natürliche Zahlen als Exponenten behandelt.
Die ersten sieben Potenzen des Binoms $a + b$ sind im folgenden zusammengestellt:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a + b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
(a+b)^6 &= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6
\end{aligned}
$$

$\Downarrow$ Binomialkoeffizienten

**Pascalsche Zahlendreieck**

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\end{array}
$$

....................................

In ihm ist jede Zahl Summe der beiden darüberstehenden.

$\Downarrow$ Eulerschen Symbole

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}
$$

..................

$\Downarrow$

**Binomischer Lehrsatz**

Ist $n$ eine beliebige natürliche Zahl, so gilt für die Potenz $(a+b)^n$ des Binoms $a + b$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \\
+ \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n
\end{aligned}
}
$$

Wie wahrscheinlich ist es nun, 4 Richtige beim Lotto getippt zu haben ?

Dazu ein kleines Gedankenexperiment:
Wir ziehen 6 der 49 Kugeln aus der Lostrommel. Die 6 gezogenen Kugeln nennen wir „Gewinnerkugeln", die anderen 43 „Nieten". Wenn wir 4 Zahlen richtig getippt haben, dann sind logischerweise 2 falsche Tipps dabei.
Wieviele verschiedene Möglichkeiten, 4 Richtige zu haben, gibt es also ?
Aus den 6 „Gewinnerkugeln" haben wir also 4 (beliebige) auf unserem Tippschein stehen. Davon gibt es $\binom{6}{4}$ Möglichkeiten. Zudem haben wir noch 2 der 43 Nieten ausgewählt, davon gibt es $\binom{43}{2}$ Möglichkeiten. Das macht zusammen $\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}$ Möglichkeiten. Da es sich um ein Laplace-Experiment handelt, ist

$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{\text{Anz. d. günstigen Ergebnisse}}{\text{Anz. aller Ergebnisse}}$ die Wahrscheinlichkeit, einen Gewinn zu erzielen. Für dieses Experiment heißt das also: $P(A)=\frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}=0{,}0969\,\%$

<u>Übungsaufgabe:</u> Berechne die Wahrscheinlichkeit für einen Dreier und einen Fünfer

***Geburtstagsproblem:***
23 zufällig ausgewählte Personen treffen sich auf einer Party. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter diesen 23 Leuten zwei, die am gleichen Tag (ohne Geb.-Jahr) Geburtstag haben ?

Insgesamt gibt es $365^{23}$ verschiedene Geburtstags-23-Tupel (Ziehen mit Zurücklegen).
Betrachten wir das Gegenereignis:
Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass alle 23 an verschiedenen Tagen Geburtstag haben ?
Insgesamt gibt es $365\cdot364\cdot363\cdot\ldots\cdot343$ verschiedene Möglichkeiten (Ziehen ohne Zurücklegen), d.h. die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis beträgt

$P(\bar{E})=\frac{365\cdot364\cdot363\cdot\ldots\cdot343}{365^{23}}$ und somit für das eigentliche Ereignis

$$P(E)=1-P(\bar{E})=1-\frac{365\cdot364\cdot363\cdot\ldots\cdot343}{365^{23}}=50{,}73\,\%$$

Das bedeutet, dass bei 23 Personen die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben, größer ist als 50 %.

Allgemein kann abgeschätzt werden:
Hat ein Zufallsversuch *m* verschiedene, gleichwahrscheinliche Ergebnisse, so ist ab der Durchführung der Nummer $k\approx1{,}2\cdot\sqrt{m}$ die Wahrscheinlichkeit, ein bereits vorhandenes Ergebnis zu treffen, ungefähr 50 %.

Angewendet auf das Zahlenlotto heißt das:
Ab der Ausspielung $1{,}2\cdot\sqrt{14000000}\approx 4490$ ist die Wahrscheinlichkeit, eine Tippreihe zu treffen, die bereits gezogen wurde, größer als 50 %.
So verwundert es nicht (mehr), dass am 21. Juni 1995 bei der 3017. Ausspielung die selben Zahlen (15-25-27-30-42-48) wie bereits am 20. Dezember 1986 gezogen wurden.

# S.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

## S.3.1 Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

Versuch: Einmaliges Würfeln mit einem L-Würfel.
Ereignis *A*: Zahl ist prim
Ergebnismenge $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
Ereignismenge $A = \{ 2, 3, 5 \}$
$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = 50\%$

Frage: Ändert sich die Wahrscheinlichkeit *P(A)*, wenn ich die Vorinformation habe, dass die gewürfelte Zahl durch 3 teilbar ist ?
$B = \{ 3, 6 \}$, in *B* ist jedoch nur *eine* Primzahl enthalten, $A \cap B = \{ 3 \}$
Die Wahrscheinlichkeit *P(A)* unter der Voraussetzung, dass *B* bereits eingetreten ist, ist also weiterhin 50%.

Frage: Ändert sich die Wahrscheinlichkeit *P(A)*, wenn ich die Vorinformation habe, dass die gewürfelte Zahl gerade ist ?
$C = \{ 2, 4, 6 \}$, in *C* ist jedoch ebenfalls nur *eine* Primzahl enthalten, $A \cap C = \{ 2 \}$
Die Wahrscheinlichkeit *P(A)* unter der Voraussetzung, dass *C* bereits eingetreten ist, hat sich also auf 33,3% verringert.

Man spricht in diesem Zusammenhang von einer ***bedingten Wahrscheinlichkeit*** und schreibt $P_B(A)$ (lies: Die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B)

In unserem Beispiel wäre also $P(A) = 50\,\%$ ,
$P_B(A) = 50\,\%$ ,
und $P_C(A) = 33{,}3\,\%$

Wie kann man $P_B(A)$ rechnerisch bestimmen ?

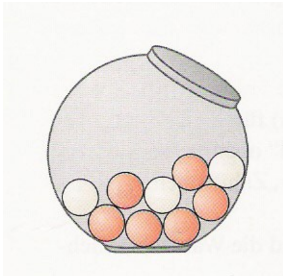
Es war $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anz. d. günstigen Ergebnisse}}{\text{Anz. aller Ergebnisse}}$ .

Hat man nun die Vorinformation, dass das Ereignis *B* bereits eingetreten ist, so muss nur noch betrachtet werden, wieviele der günstigen Ergebnisse nun noch in *B* vertreten sind. Die günstigen Ergebnisse (also alle Elemente aus *A*), die auch in *B* vertreten sind, lassen sich beschreiben als $A \cap B$ . Da „alle möglichen Ergebnisse" nun nur noch die Menge *B* ist, ist die Wahrscheinlichkeit für *A* unter der Bedingung *B*:

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

oder $P_B(A) = \dfrac{\text{Anz. d. Elemente in } A \cap B}{\text{Anz. d. Elemente in } B}$

Diese bedingte Wahrscheinlichkeit lässt sich auch am Baumdiagramm ablesen:

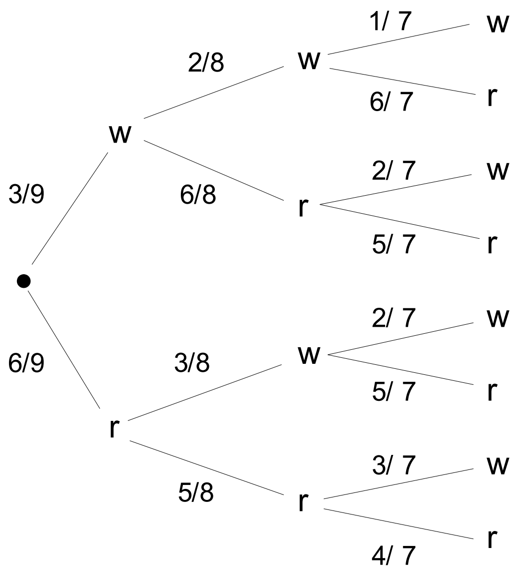


Betrachten wir wieder unser Beispiel von oben mit 6 roten (r) und 3 weißen (w) Kugeln in einer Urne. Es wird <u>ohne</u> Zurücklegen gezogen.

Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, im ***zweiten*** Zug eine weiße Kugel zu ziehen ?

Während im ersten Zug die Wahrscheinlichkeit mit 1/3 angegeben werden kann, muss für den zweiten Zug unterschieden werden, ob im ersten eine rote oder bereits eine weiße Kugel gezogen wurde.
Wurde im ersten Zug eine rote Kugel gezogen, dann ist die Wahrscheinlichkeit 3/8. (Es befinden sich dann noch 8 Kugeln in der Urne: 3 weiße und 5 rote).
Wurde im ersten Zug eine weiße Kugel gezogen, dann ist die Wahrscheinlichkeit 2/8. (Es befinden sich dann noch 8 Kugeln in der Urne: 2 weiße und 6 rote).

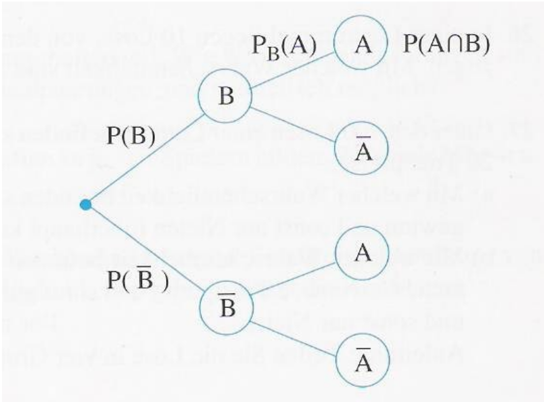
Im Baumdiagramm erscheinen diese unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten an den verschiedenen Ästen, die (im zweiten Zug) zu den weißen Kugeln führen:




Analog ändern sich natürlich die Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen einer roten Kugel, je nachdem, ob im ersten Zug eine rote oder eine weiße Kugel gezogen wurde.

Beim dritten Zug sind die Veränderung ebenfalls deutlich zu erkennen. Beachte:
Trotzdem gibt es an verschiedenen Ästen teilweise gleiche Wahrscheinlichkeiten.
(Warum ?)

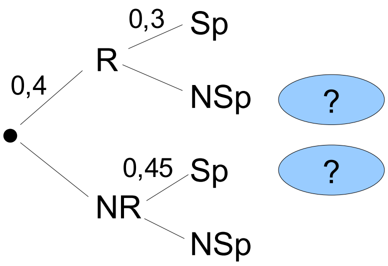
Wie rechts zu erkennen ist, gibt *P(B)* die Wahrscheinlichkeit an, dass im ersten Zug *B* gezogen wird. $P_B(A)$ gibt dann an, mit welcher Wahrscheinlichkeit *A* gezogen wird, wenn bereits *B* gezogen wurde.
Die Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass *B* ***und*** *A* gezogen wurden.




Laut 1. Pfadregel ist $P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$ . Dies entspricht genau der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit (siehe oben).

Übungsaufgabe:
40% der Mitarbeiter einer Firma sind Raucher, 30% der Raucher treiben Sport. Unter den Nichtrauchern beträgt der Anteil der Sportler 45%
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Mitarbeiter
a) Nichtraucher ist und Sport treibt ?
b) Raucher ist und keinen Sport treibt ?

Diese Aufgabe lässt sich mit Hilfe eines Baumdiagramms lösen.




Gesucht sind also die Wahrscheinlichkeiten (a) $P(R \cap NSp)$ bzw. (b) $P(NR \cap Sp)$
Diese lassen sich berechnen zu:
$P(R \cap NSp) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 28\,\%$ und $P(NR \cap Sp) = 0{,}6 \cdot 0{,}45 = 27\,\%$
Die zur Rechnung notwendigen Werte erhält man durch Vervollständigen des Baumdiagramms.

# S.3.2 Vierfeldertafel

Statistische Daten können recht übersichtlich in einer Vierfeldertafel dargestellt werden, wenn nur 2 Merkmale mit je 2 „Ausprägungen“ vorhanden sind.

Vierfeldertafeln können mit absoluten oder mit relativen Häufigkeiten ausgefüllt sein:

Beispiel:

**Viele Jugendliche ohne Hauptschulabschluss**
Am Ende des letzten Schuljahres verließen 291 418 Jugendliche die von ihnen bis dahin besuchte weiterführende Schule, weil die Schulpflicht beendet war (nach der 9. bzw. 10. Klasse), darunter 121 174 Mädchen. 72 443 von diesen Jugendlichen hatten keinen schulischen Abschluss erreicht, davon 25 762 Mädchen.

Es gibt in diesem Beispiel 2 Merkmale (Geschlecht / Abschluss) mit je 2 Ausprägungen (männlich / weiblich und mit / ohne Abschluss). Die Vierfeldertafel mit den angegebenen Daten von oben sieht dann folgendermaßen aus (M = Mädchen, A = mit Abschluss):

| | $A$ | $\bar{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $M$ | | 25 762 | 121 174 |
| $\bar{M}$ | | | |
| | | 72 443 | 291 418 |

Vorteil der Vierfeldertafel ist da einfache „Berechnen“ der fehlenden Zahlen. Da nach rechts und nach unten nur addiert wird, können die nichtausgefüllten Felder einfach durch Subtraktionen gefüllt werden. Im Feld unten rechts steht die Gesamtsumme, in unserem Beispiel die Gesamtzahl der Schüler.

| | $A$ | $\bar{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $M$ | 95 412 | 25 762 | 121 174 |
| $\bar{M}$ | 123 563 | 46 681 | 170 244 |
| | 218 975 | 72 443 | 291 418 |

Dividiert man dann alle Zahlen durch die Gesamtsumme rechts unten, dann ergibt sich eine Vierfeldertafel mit relativen Häufigkeiten:

| | $A$ | $\bar{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $M$ | 32,74 % | 8,84 % | 41,58 % |
| $\bar{M}$ | 42,40 % | 16,02 % | 58,42 % |
| | 75,14 % | 24,86 % | 100 % |

Anhand dieser Vierfeldertafel kann man schnell gewünschte Wahrscheinlichkeiten ablesen:
So ist z.B. $P(M)=41{,}58\,\%$ , $P(\bar{A})=24{,}86\,\%$ , $P(\bar{M}\cap A)=42{,}40\,\%$

Allgemein hat die Vierfeldertafel also folgendes Aussehen:

| | $A$ | $\bar{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $M$ | $P(M \cap A)$ | $P(M \cap \bar{A})$ | $P(M)$ |
| $\bar{M}$ | $P(\bar{M} \cap A)$ | $P(\bar{M} \cap \bar{A})$ | $P(\bar{M})$ |
| | $P(A)$ | $P(\bar{A})$ | 100 % |

Übungsaufgabe:
(Duden Paetec, Kopiervorlagen Stochastik, Seite 30 & 31)

Ein weiterer Vorteil der Vierfeldertafeln ist, dass man (im vollkommen ausgefüllten Zustand mit relativen Häufigkeiten) die zur Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten notwendigen Wahrscheinlichkeiten einfach ablesen kann.

So ist z.B. $P_A(\bar{M}) = \frac{P(A \cap \bar{M})}{P(A)}$ , alle dazu relevanten Daten können aus der Vierfelder-tafel abgelesen werden.

Zurück zu unserem Beispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig herausgegriffener Schüler keinen Abschluss hat, wenn wir bereits wissen, dass er männlich ist ?

$$P_{\bar{M}}(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{0{,}1602}{0{,}5842} = 27{,}42\,\%$$

Die Vierfeldertafel erweist sich ebenso als praktisches Instrument, wenn man z.B. die Wahrscheinlichkeit $P(A \cup M)$ ("Mädchen" oder "mit Abschluss") berechnen will.
In der Vierfeldertafel müssen dazu die drei Felder $P(A \cap M)$ , $P(A \cap \bar{M})$ und $P(\bar{A} \cap M)$ addiert werden.

Wie bereits in Kapitel S.1.3 gezeigt, ist $P(A \cup M) = P(A) + P(M) - P(A \cap M)$ . Dies kann an der Vierfeldertafel ebenfalls abgelesen werden. Berechnet man nur die Summe $P(A) + P(M)$ , dann addiert man die linken beiden und die oberen beiden Felder. Folglich hat man das Feld oben links ( $P(A \cap M)$ ) zweimal in die Rechnung eingebracht. Deshalb muss es noch einmal subtrahiert werden, um die Rechnung zu berichtigen.

Übungsaufgaben:

**1.** *Berechnen Sie* $P_A(B)$, $P_B(A)$, $P_{\overline{A}}(\overline{B})$ und $P_{\overline{B}}(\overline{A})$ sowohl mittels Vierfeldertafel als auch mittels Baumdiagramm, wenn für die Ereignisse A, B die jeweils angegebenen Bedingungen gelten.

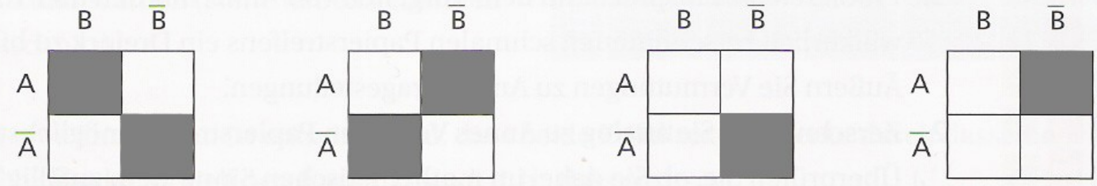
a) $P(A) = 0{,}71$, $P(B) = 0{,}43$ und $P(A \cap B) = 0{,}37$

b) $P(A) = 0{,}39$, $P(A \cap B) = 0{,}28$ und $P(A \cup B) = 0{,}81$

**8.** *Ordnen Sie* jedem der Ereignisse die ihm entsprechende Vierfeldertafel *zu:*

$C = \{\text{weder A noch B}\}$;

$D = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cup \overline{B})$




Vierfeldertafel 1 Vierfeldertafel 2 Vierfeldertafel 3 Vierfeldertafel 4

Beschreiben Sie die in den restlichen zwei Vierfeldertafeln dargestellten Ereignisse.

**9.** *Berechnen Sie* anhand nebenstehender Vierfeldertafel die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

a) P({B tritt nicht ein})

b) P({nicht A, aber B tritt ein})

c) P({A oder B tritt ein})

d) P({weder A noch B tritt ein})

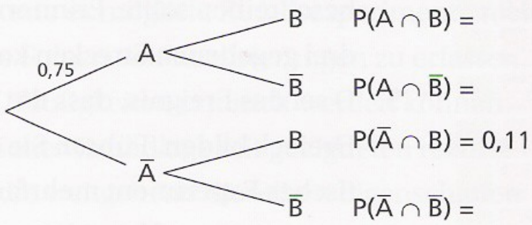
e) P({genau eines der Ereignisse A, B tritt ein})

| | B | | |
|---|---|---|---|
| A | | 0,01 | |
| | | | 0,80 |
| | 0,40 | | |

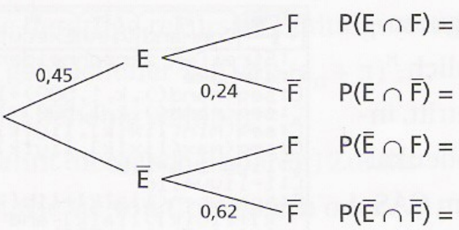
**10.** *Erstellen Sie* jeweils die Vierfeldertafel und das zugehörige Baumdiagramm.

a)

| | B | $\overline{B}$ | |
|---|---|---|---|
| A | | | 0,75 |
| $\overline{A}$ | 0,11 | | |
| | | 0,68 | |




b)




| | E | |
|---|---|---|
| F | | |
| | | |

# S.3.3 Unabhängigkeit von Ereignissen

Durch das Eintreten eines bestimmten Ereignisses *B* kann sich die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines weiteren Ereignisses *A* ändern (bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$ ).
Ist das der Fall, so nennt man *A* ***abhängig*** von *B*.
Im allgemeinen ist also $P_B(A) \neq P_{\bar{B}}(A)$ .

Wird die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ jedoch durch das Eintreten des Ereignisses *B* ***nicht geändert***, so nennt man *A* und *B* ***unabhängige Ereignisse.***
Für unabhängige Ereignisse gilt also $P(A)=P_B(A)$ , und natürlich auch umgekehrt $P(B)=P_A(B)$ .

Dazu folgendes Beispiel:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Skat-Blatt eine Dame herauszuziehen ?
Offensichtlich ist die Wahrscheinlichkeit $P(A)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$ .

Betrachten wir nun zweierlei Vorab-Informationen:

(1) Im Fall, dass wir bereits wissen, eine Herz-Karte gezogen zu haben, berechnet sich $P_B(A)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}=\frac{1}{8}$ . Die Wahrscheinlichkeit hat sich also nicht geändert.

(2) Im Fall, dass wir bereits wissen, eine Bild-Karte gezogen zu haben, ändert sich die Wahrscheinlichkeit auf $P_B(A)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ .

Auch in unserem Sprachgebrauch benutzen wir, wie es auch in der Stochastik zutrifft, die Aussage, dass im Fall (1) das Ergebnis unabhängig von der ersten Information war, während wir im Fall (2) eindeutig sagen würden, dass die Wahrscheinlichkeit abhängig war von der Vorab-Information.

Die (Un-)Abhängigkeit von zwei Ereignissen kann recht einfach gezeigt werden:

Am ***Baumdiagramm*** können die Wahrscheinlichkeiten direkt abgelesen werden. Ist die Wahrscheinlichkeit in der 2. (oder höheren) Stufe zu einem Ergebnis in jedem Teilbaum die selbe, dann ist sie offensichtlich nicht von vorherigen Ergebnissen abhängig (wie z.B. beim Ziehen mit Zurücklegen). Gibt es unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten zu gleichen Ergebnissen, sind die Ereignisse abhängig voneinander (wie beim Ziehen ohne Zurücklegen).

In einer ***Vierfeldertafel*** kann die (Un-)Abhängigkeit rechnerisch gezeigt werden:
Sind die Ereignisse *A* und *B* unabhängig voneinander, dann gilt: $P(A)=P_B(A)$ .
Zudem gilt weiterhin $P_B(A)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ oder $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}=P(A)$ . Beide Seiten mit $P(B)$ multipliziert ergibt

$$\boxed{P(A) \cdot P(B) \; = \; P(A \cap B)}$$

Gilt diese Gleichung nicht, dann sind die Ereignisse *A* und *B* voneinander abhängig.

Man kann zudem erkennen, dass in der Vierfeldertafel zweier unabhängiger Ereignisse die 2 Zahlenpaare (sowohl nach rechts als auch untereinander) das selbe Verhältnis haben. Ist jedoch nur eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben (z.B. bei mehreren Elementarereignissen, wo auch ein Baum zu unübersichtlich wäre), muss ebenfalls auf die rechnerische Methode zurückgegriffen werden.

Dazu ein Beispiel:
Ein Zufallsexperiment hat die Ergebnismenge Ω = { a, b, c, d, e } und die Wahrscheinlichkeitsverteilung

| *x* | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|
| *P(x)* | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,1 |

Sind die Ereignisse *A* = { c, d } und *B* = { a, d } voneinander unabhängig ?

Dazu berechnen wir die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = 0{,}2+0{,}3 = 0{,}5$$
$$P(B) = 0{,}2+0{,}3 = 0{,}5$$
$$P(A\cap B) = P(\{d\}) = 0{,}3$$
$$P(A)\cdot P(B) = 0{,}5\cdot 0{,}5 = 0{,}25$$

Folglich sind die beiden Ereignisse abhängig voneinander.

Diese Rechnung können wir auch noch für unser Eingangsbeispiel aufstellen:

$$P(\text{Dame}) = \frac{1}{8} \quad ; \quad P(\text{Herz}) = \frac{1}{4} \quad ; \quad P(\text{Dame} \cap \text{Herz}) = P(\text{Herz Dame}) = \frac{1}{32}$$

$P(\text{Dame})\cdot P(\text{Herz}) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{32}$ ⇒ Die beiden Ereignisse sind also **unabhängig**.

$$P(\text{Dame}) = \frac{1}{8} \quad ; \quad P(\text{Bild}) = \frac{3}{8} \quad ; \quad P(\text{Dame} \cap \text{Bild}) = P(\text{Dame}) = \frac{1}{8}$$

$P(\text{Dame})\cdot P(\text{Herz}) = \frac{1}{8}\cdot\frac{3}{8} = \frac{3}{64}$ ⇒ Die beiden Ereignisse sind also **abhängig**.

weitere Übungsaufgaben:

**1.** Ein Zufallsexperiment sei durch folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben:

| Ergebnis e | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P({e}) | 0,30 | 0,10 | 0,15 | 0,050 | 0,10 | 0,15 | 0,050 | 0,10 |

*Untersuchen Sie* die Ereignisse A = {1; 3; 6}, B = {4; 5; 6; 7}, C = {3; 5; 6; 8} und D = {2; 5; 8} hinsichtlich ihrer stochastischen Unabhängigkeit.

**2.** Zufallsexperiment: Dreimaliges Werfen eines L-Würfels mit den Augenzahlen 1 bis 6

Ereignisse: A = {beim ersten Wurf wird eine 3 gewürfelt}
B = {beim zweiten Wurf wird eine gerade Zahl gewürfelt}
C = {beim ersten Wurf wird eine Zahl kleiner als 5 gewürfelt}

a) *Begründen Sie*, dass A und B voneinander (stochastisch) unabhängig sind.

b) *Begründen Sie*, dass A und C nicht voneinander unabhängig sind.

c) *Geben Sie* ein Ereignis D *an*, für das $P(D) = \frac{1}{36}$ gilt und das von A unabhängig ist.

**3.** Beweisen Sie, dass aus der Unabhängigkeit zweier Ereignisse $A$ und $B$ auch die Unabhängigkeit der Ereignisse $A$ und $\overline{B}$ folgt.

**4.** *Erstellen Sie* aufgrund der Angaben jeweils Vierfeldertafeln sowohl für den Fall, dass die Ereignisse A und B voneinander unabhängig sind, als auch für den Fall, dass A und B unvereinbar sind.

a)

| | B | $\overline{B}$ | |
|---|---|---|---|
| A | 0,15 | | |
| $\overline{A}$ | | | |
| | | 0,40 | |

b)

| | B | $\overline{B}$ | |
|---|---|---|---|
| A | | | 0,10 |
| $\overline{A}$ | | | |

$P(A \cup B) = 0{,}60$

**5.** *Untersuchen Sie* anhand folgender drei Fälle, in welcher Größenrelation P(A) und $P_B(A)$ zueinander stehen.

(1)

| | B | $\overline{B}$ |
|---|---|---|
| A | | 0,4 |
| $\overline{A}$ | 0,1 | |
| | | 0,6 |

(2)

| | B | $\overline{B}$ |
|---|---|---|
| A | | 0,4 |
| $\overline{A}$ | 0,2 | 0,1 |

(3) Die Ereignisse A, B sind stochastisch unabhängig voneinander.

**14.** Prüfen Sie beim zweimaligen Würfelwurf die Ereignisse A und B auf stochastische Unabhängigkeit.

a) A: Im ersten Wurf kommt eine Sechs. B: Im zweiten Wurf kommt keine 6.

b) A: Im ersten Wurf kommt Eins. B: Die Augensumme der Würfe ist gerade.

c) A: Gerade Augenzahl im ersten Wurf. B: In beiden Würfen gleiche Augenzahl.

**15.** Ein Würfel wird einmal geworfen. Betrachtet werden die beiden folgenden Ereignisse:
A: Die Augenzahl ist gerade B: Die Augenzahl ist durch 3 teilbar
Sind die beiden Ereignisse stochastisch unabhängig?

**17.** Bei einem Test lösten 360 Personen zwei Aufgaben. Betrachtet wurden die folgenden Ereignisse:
A: „Aufgabe 1 wird richtig gelöst"
B: „Aufgabe 2 wird richtig gelöst".
Die Testergebnisse wurden in einer Vierfeldertafel erfasst. Prüfen Sie, ob A und B unabhängig sind.

| | $B$ | $\overline{B}$ |
|---|---|---|
| $A$ | 80 | 40 |
| $\overline{A}$ | 160 | 80 |

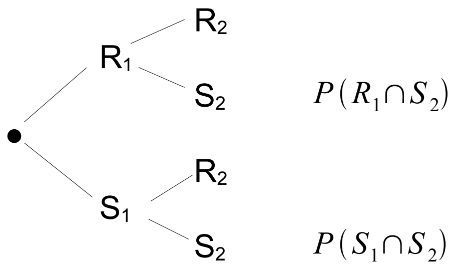
**18.** Der englische Naturforscher Sir Francis Galton (1822–1911) untersuchte den Zusammenhang zwischen der Augenfarbe von 1000 Vätern und je einem ihrer Söhne. Die Ergebnisse sind in einer Vierfeldertafel dargestellt. Dabei sei V das Ereignis „Vater ist helläugig", S das Ereignis „Sohn ist helläugig". Untersuchen Sie V und S auf Unabhängigkeit.

| | $S$ | $\overline{S}$ |
|---|---|---|
| $V$ | 471 | 151 |
| $\overline{V}$ | 148 | 230 |

**19.** In einer empirischen Untersuchung wird geprüft, ob ein Zusammenhang zwischen blonden Haaren und blauen Augen bzw. blonden Haaren und dem Geschlecht besteht. Von 842 untersuchten Personen hatten 314 blonde Haare. Unter den 268 Blauäugigen waren 121 Blonde. 116 von 310 Mädchen waren blond. Überprüfen Sie die untersuchten Zusammenhänge rechnerisch.

# S.3.4 Die totale Wahrscheinlichkeit

Betrachten wir nochmal das Zufallsexperiment „Ziehen einer Kugel ohne Zurücklegen“.
In der Urne sind 4 rote (R) und 3 schwarze (S) Kugeln.
Wir bestimmen die Wahrscheinlichkeit *P*(2. Kugel ist schwarz).
Das Baumdiagramm sind folgendermaßen aus:




$P(S_2) = P(R_1 \cap S_2) + P(S_1 \cap S_2)$ ,d.h. die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus der Summe der beiden Pfade, die zum Ereignis führen (2. Pfadregel).

Mit Hilfe der bedingten Wahrscheinlichkeiten lässt sich dies schreiben als:

$P(S_2) = P(R_1) \cdot P_{R1}(S_2) + P(S_1) \cdot P_{S1}(S_2)$

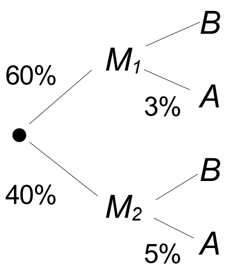
oder allgemein als ***Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit***

$$\boxed{P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

(entspricht der 2. Pfadregel am Baumdiagramm)

Beispiel: Eine Fabrik produziert mit zwei Maschinen die gleichen Kleinteile. 60% der Produktion werden mit der ersten, 40% mit der zweiten Maschine hergestellt. Bei der ersten Maschine beträgt die Ausschussquote 3%, bei der zweiten 5%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein produziertes Teil defekt ?

<u>Lösung:</u> Wir führen folgende Ereignisse ein:
$M_1$: Das Teil wurde von Maschine 1 produziert.
$M_2$: Das Teil wurde von Maschine 2 produziert.
$A$: Das Teil ist defekt
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit *P(A)*




$A = (M_1 \cap A) \cup (M_2 \cap A)$ (auf $M_1$ produziert und defekt <u>oder</u> auf $M_2$ produziert und defekt)

$$P(A) = P(M_1) \cdot P_{M1}(A) + P(M_2) \cdot P_{M2}(A)$$

$$P(A) = 0{,}60 \cdot 0{,}03 + 0{,}40 \cdot 0{,}05 = 0{,}038 = 3{,}8\%$$

Übungsaufgaben:

**Übung 20**

In einem Entwicklungsland leiden ca. 0,1% der Menschen an einer bestimmten Infektionskrankheit. Ein Test zeigt die Krankheit bei 98% der Kranken korrekt an, während er bei 5% der Gesunden irrtümlich die Krankheit anzeigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt der Test bei einer zufällig ausgewählten Person ein positives Resultat? (Lösen Sie mithilfe eines Baumdiagramms *und* des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit.)

**Übung 21**

Ein Kandidat für den Posten des Schulsprechers wird von 63% der 528 weiblichen Schüler favorisiert. Von den Jungen wollen 41% für ihn stimmen. Insgesamt sind 1200 Schüler auf der Schule. Mit welchem Stimmanteil kann er rechnen?

**24.** Die Urne $U_1$ enthält 10 rote und 5 grüne Kugeln, die Urne $U_2$ enthält 3 rote und 7 grüne Kugeln. Jemand wählt blindlings (d.h. mit verbundenen Augen) eine der beiden Urnen aus und zieht eine Kugel.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese rot?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese grün?

**25.** 3% der Bevölkerung sind zuckerkrank. Ein Test zeigt bei 96% der Kranken die Krankheit an. Bei den Gesunden ergibt der Test bei 6% irrtümlich ein positives Ergebnis.
Welcher Prozentsatz der Durchschnittsbevölkerung wird bei einem Massenscreening ein positives Testergebnis erhalten?

**27.** Ein Hersteller von elektrischen Widerständen produziert diese auf drei Maschinen $M_1$, $M_2$, und $M_3$. 20 % der Widerstände werden auf $M_1$, 30 % auf $M_2$ und 50 % auf $M_3$ produziert. Die Ausschussraten betragen 4 % für $M_1$, 3 % für $M_2$ und 2 % für $M_3$.
Welche Ausschussrate ergibt sich für die Gesamtproduktion?

**28.** Formulieren Sie den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit für den Fall einer Zerlegung des Ergebnisraumes $\Omega$ in 3 paarweise disjunkte (d.h. je zwei Mengen haben eine leere Schnittmenge) Teilmengen $B_1$, $B_2$, $B_3$.

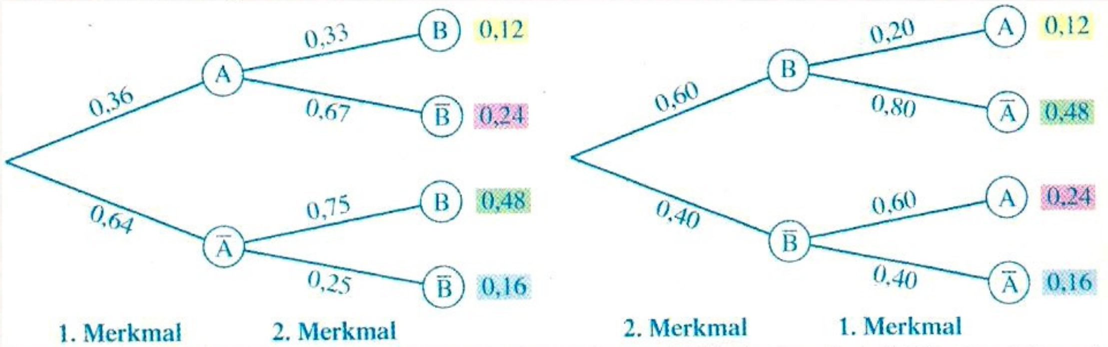
# S.3.5 Der Satz von Bayes

Der Satz von Bayes hilft uns, einen Zusammenhang zwischen den Wahrscheinlichkeiten $P_B(A)$ und $P_A(B)$ herzustellen. Man kann also mit dieser Formel sozusagen Rückschlüsse ziehen. Man will nicht nur aus einer eingetretenen Bedingung *B* auf die mögliche Wirkung *A* stochastisch schließen, sondern auch mit Hilfe einer beobachteten Wirkung *A* Aussagen über mögliche Ursachen *B* treffen.

Dies macht man am besten mit einem sog. ***umgekehrten Baumdiagramm*** deutlich:

**(1) Umkehrung des Baumdiagramms**
Vertauscht man die Reihenfolge der betrachteten Merkmale bei einem Baumdiagramm, dann erhält man das so genannte **umgekehrte Baumdiagramm.** Die Wahrscheinlichkeiten, die an den einzelnen Pfaden stehen, unterscheiden sich im Allgemeinen bei einem Baumdiagramm und seiner Umkehrung, denn sie beziehen sich auf verschiedene Merkmale und daher auf verschiedene Teilgesamtheiten.

| | 2. Merkmal: $B$ | 2. Merkmal: $\overline{B}$ | gesamt |
|---|---|---|---|
| 1. Merkmal: $A$ | 0,12 | 0,24 | 0,36 |
| 1. Merkmal: $\overline{A}$ | 0,48 | 0,16 | 0,64 |
| gesamt | 0,60 | 0,40 | 1 |




Dagegen stimmen die (am Ende der Pfade notierten) Pfadwahrscheinlichkeiten bis auf die Reihenfolge überein, da sie die Wahrscheinlichkeiten der inneren Felder derselben Vierfeldertafel sind.

Wie den beiden Baumdiagrammen zu entnehmen ist, ist

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

Allerdings sind die Wahrscheinlichkeiten entlang der Pfade verschieden:

$$P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

Dividiert man nun beide Seiten durch *P(A)* und ersetzt dies durch die totale Wahrscheinlichkeit, dann erhält man

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(B) \cdot P_B(A)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)}}$$

Beispiel:

**Beispiel: Die Aussagekraft medizinisch-diagnostischer Tests**

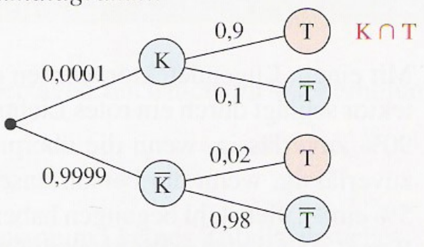
Eine von zehntausend Personen leidet an einer bestimmten Stoffwechselerkrankung. Für diese Erkrankung gibt es einen einfachen diagnostischen Test, der bei Kranken mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% und bei Gesunden mit einer Wahrscheinlichkeit von 98% die korrekte Diagnose liefert. Eine Person, die sich dem Test unterzieht, erhält ein positives, d. h. für das Vorliegen der Erkrankung sprechendes Testergebnis. Wie wahrscheinlich ist es, dass dieser Patient tatsächlich erkrankt ist?

Lösung:
Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_T(K)$, dass jemand tatsächlich erkrankt ist, wenn der Test ein positives Resultat ergibt.

*Bezeichnungen:*
K: „Die getestete Person ist krank"
T: „Der Test zeigt ein positives Resultat"

Gegeben sind die Wahrscheinlichkeiten:
$P(K) = 0{,}0001$, $P_K(T) = 0{,}9$, $P_{\overline{K}}(\overline{T}) = 0{,}98$.
Als Gegenwahrscheinlichkeiten ergeben sich hieraus die Wahrscheinlichkeiten:
$P(\overline{K}) = 0{,}9999$, $P_K(\overline{T}) = 0{,}1$,
$P_{\overline{K}}(T) = 0{,}02$.

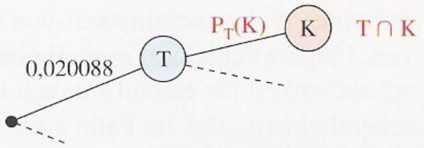
*Baumdiagramm:*




$$P(T) = 0{,}0001 \cdot 0{,}9 + 0{,}9999 \cdot 0{,}02 = 0{,}020088$$

1. Möglichkeit:
Wir lösen die Aufgabe zunächst ohne Verwendung der Formeln nur mithilfe des zu den Ereignissen K und T gehörigen zweistufigen Baumdiagramms sowie des dazu inversen Baumdiagramms.*
Nach nebenstehend aufgeführter Rechnung erhalten wir dann $P_T(K) \approx 0{,}45\%$.

*Inverses Baumdiagramm:*




$$P(T) \cdot P_T(K) = P(T \cap K) = P(K \cap T)$$
$$0{,}020088 \cdot P_T(K) = 0{,}0001 \cdot 0{,}9$$
$$P_T(K) = 0{,}00448 \approx 0{,}45\%$$

2. Möglichkeit:
Die Anwendung der Formeln liefert ebenfalls das gesuchte Ergebnis. Hierzu berechnen wir zunächst die Wahrscheinlichkeit P(T) mithilfe der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit.

*Totale Wahrscheinlichkeit:*

$$P(T) = P(K) \cdot P_K(T) + P(\overline{K}) \cdot P_{\overline{K}}(T) = 0{,}0001 \cdot 0{,}9 + 0{,}9999 \cdot 0{,}02 = 0{,}020088$$

Nun können wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P_T(K)$ mithilfe des Satzes von Bayes bestimmen.
Wir erhalten als Resultat $P_T(K) \approx 0{,}45\%$.

*Anwendung der Formel von Bayes:*

$$P_T(K) = \frac{P(K) \cdot P_K(T)}{P(T)} = \frac{0{,}0001 \cdot 0{,}90}{0{,}020088} = 0{,}00448 \approx 0{,}45\%$$

Die getestete Person muss sich also trotz des positiven Testergebnisses keine übertriebenen Sorgen machen. Die aus Sicherheitsgründen folgenden Nachuntersuchungen werden mit großer Wahrscheinlichkeit zum Ergebnis haben, dass die Testperson nicht an der Stoffwechselkrankheit leidet. Bei einer seltenen Krankheit ist die Wahrscheinlichkeit einer Fehldiagnose oft hoch.

# S.4 Binomialverteilung

## S.4.1 Bernoulli-Ketten

Bei vielen Zufallsexperimenten interessiert man sich nur dafür, ob ein Ereignis *A* eintritt oder ob es nicht eintritt. Wenn das Ereignis *A* eintritt, nennt man es ***Treffer*** (T), ansonsten ***Niete*** (N). Ein solches Experiment mit nur zwei Ergebnissen nennt man ***Bernoulli-Eperiment***, benannt nach Jakob Bernoulli (1655 - 1705). Dabei kann jedes beliebige Zufallsexperiment als Bernoulli-Experiment angesehen werden, wenn man bei der Ausführung nur fragt, ob ein bestimmtes Ereignis eintritt oder nicht.

Die Trefferwahrscheinlichkeit bezeichnet man als *p*, die Nietenwahrscheinlichkeit ergibt sich dann zu 1 - *p* .

Beispiele:

| | |
|---|---|
| 1. Werfen einer Münze: Ω = { Kopf, Zahl } | *p* = 1/2 |
| 2. Würfeln: Ω = { Sechs, keine Sechs } | *p* = 1/6 |
| 3. Ziehen aus einer Urne: Ω = { rot, nicht rot } | *p* = (Anz. rot) / Gesamtanz. |
| 4. Überprüfen eines Bauteil: Ω = { defekt, nicht defekt } | *p* = .... |

Wiederholt man ein Bernoulli-Experiment *n*-mal in exakt gleicher Weise und unabhängig voneinander, so spricht man von einer ***Bernoulli-Kette*** der Länge *n* mit der Treffer-wahrscheinlichkeit *p*.

Beispiel:

Ein Würfel werde 4mal hintereinander geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei diesen 4 Würfen genau 2 Sechsen zu haben ?

In diesem Fall ist *n* = 4, und *X* sei die Anzahl der geworfenen Sechsen, also *X* = 2.

Offensichtlich ist $P(TTNN)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{1296}=1{,}93\,\%$

Allerdings können die beiden Sechsen ja auch am Ende fallen, oder in der Mitte, oder ....

Wir müssen also noch weitere Wahrschenlichkeiten berechnen, nämlich [außer *P(TTNN)*]: *P(TNTN)*, *P(TNNT)*, *P(NNTT)*, *P(NTNT)* und *P(NTTN)*. Wie man leicht nachrechnet, sind alle Wahrscheinlichkeiten gleich groß, so dass sich die Gesamtwahrscheinlichkeit ergibt zu

$$P(X=2)=6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{150}{1296}=11{,}57\%$$ .

Nun kann man, besonders bei größeren Zahlen, die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten (entspricht der Anzahl der Pfade am Baum), nicht mehr von Hand abzählen, sondern man muss ein geeignetes (mathematisches) Mittel haben, die Anzahl zu berechnen. Dieses Mittel haben wir jedoch bereits kennen gelernt: der Binomialkoeffizient. Aber warum der Binomialkoeffizient ? Die Anzahl der Permutationen von *n* Elementen war *n!* , hierbei ist jedoch zu beachten, dass hier verschiedene, ununterscheidbare Elemente vorhanden sind. So gibt es hier *k* Treffer und *(n-k)* Nieten.

<u>Beispiel:</u>
Habe ich die 5 Farben rot, grün, blau, gelb, schwarz, dann gibt es 5! = 120 verschiedene Möglichkeiten, diese Farben anzuordnen. Tausche ich die erste (r) gegen die dritte (b), so erhalte ich eine andere der 120 Möglichkeiten.

Habe ich jedoch die Folge TNTNN und tausche das erste mit dem dritten Element, dann sieht die Buchstabenfolge genauso aus wie zuvor, ebenso, wenn ich das vierte mit dem fünften Element tausche, es bleibt TNTNN. Ich muss dementsprechend die 5! Möglichkeiten durch die Anzahl der zwei Permutationen dividieren: durch 2! (wegen der beiden Treffer) und 3! (wegen der 3 Nieten), oder allgemein: $\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$ . Dies ist jedoch genau der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ .

In unserem Beispiel war *n* = 4 (Anzahl der Züge) und *k* = 2 (Anzahl der Treffer). Somit gibt es $\binom{4}{2}=6$ Möglichkeiten.

Allgemein lässt sich also folgende ***Bernoulli-Formel*** aufstellen:

Bei einer Bernoulli-Kette der Länge *n* mit der Trefferwahrscheinlichkeit *p* ist die Wahrscheinlichkeit genau *X* = *k* Treffer zu erlangen (*k* ≤ *n*)

$$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$$

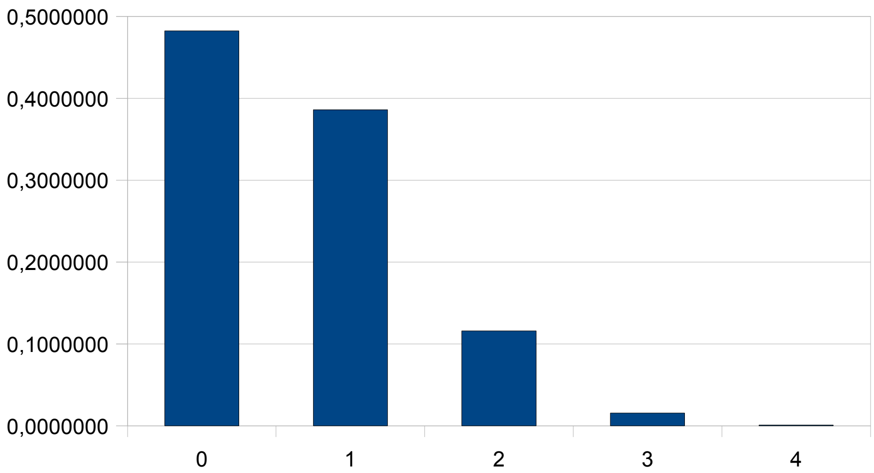
Dabei ist es vollkommen egal, an welcher Stelle der *n*-Tupel die Treffer und die Nieten stehen.

Mit dieser Formel lassen sich nun die Wahrscheinlichkeiten berechnen, mit denen beim viermaligen Würfeln genau 0, 1, 2, 3 oder 4 Sechsen auftreten.
*P(X = 0)* = 48,23 %
*P(X = 1)* = 38,58 %
*P(X = 2)* = 11,57 % (siehe auch bereits oben)
*P(X = 3)* = 1,54 %
*P(X = 4)* = 0,08 %
In Summe sind das natürlich 100%.

Ist *X* die Trefferanzahl bei einer Bernoulli-Kette, dann nennt man die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung von *X* eine ***Binomialverteilung*** mit den Parametern *n* und *p*. Deshalb schreibt man für *P( X = k )* auch *B( n; p; k)* oder $B_{n;p}(k)$.

Für das (schnelle) Berechnen von mehreren Werten einer Binomialverteilung können die Programme *„Excel“* oder *„OpenOffice Calc“* verwendet werden. *B( n; p; k)* heißt dort *binomvert(k; n; p; 0)* [Achtung bei der Reihenfolge; der Parameter „0“ wird später erklärt.]

Das Diagramm zur Binomialverteilung aus obigem Beispiel hat folgendes Aussehen:




<u>1. Beispielaufgabe:</u>
Ein Toto-Spieler tippt bei der 13er-Wette rein zufällig auf Sieg, Unentschieden oder Niederlage der Gastgeber-Mannschaft (1, 0 oder 2).
a) Wie groß ist seine Chance, genau 10 Richtige zu tippen, damit er einen Gewinn der Gewinnklasse 4 erhält ?
b) Wie groß ist die Chance auf einen Gewinn, wenn er dazu *mindestens* 10 Richtige braucht ?

a) Für das Spiel gilt: *n* = 13 (Länge der Bernoullikette), *k* = 10 (Anzahl der Treffer) und *p* = 1/3 (Trefferwahrscheinlichkeit).

$$P(X=10) \;=\; \binom{13}{10}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3} \;=\; 0{,}001435 \;\approx\; 0{,}14\,\%$$

b) Um die Wahrscheinlichkeit von mindestens 10 Treffern zu berechnen, braucht man die Wahrscheinlichkeiten für 10, 11, 12 und 13 Treffern. Somit ist

$$P(A) \;=\; P(X=10)+P(X=11)+P(X=12)+P(X=13) \;=\; \dots \;=\; 0{,}1648\,\% \quad \text{(nachrechnen!)}$$

<u>2. Beispielaufgabe:</u>
Ein Glücksrad hat vier gleich große Sektoren, drei weiße und einen roten. Wie oft muss man mindestens drehen, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens einmal rot fallen soll ?
gesucht: *n*

Lösung:

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 1) &\geq 0{,}95 \\
1 - P(X = 0) &\geq 0{,}95 \\
P(X = 0) &\leq 0{,}05 \\
\binom{n}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^n &\leq 0{,}05 \\
0{,}75^n &\leq 0{,}05 \\
n \cdot \log(0{,}75) &\leq \log(0{,}05) \\
n &\geq 10{,}41
\end{aligned}
$$

Bei 11maligem Drehen ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal rot zu erdrehen, größer als 95%.

<u>Übungsaufgaben:</u>
(Duden Paetec, Kopiervorlagen Stochastik, Seite 44) und (Bigalke/Köhler, Seite 287)

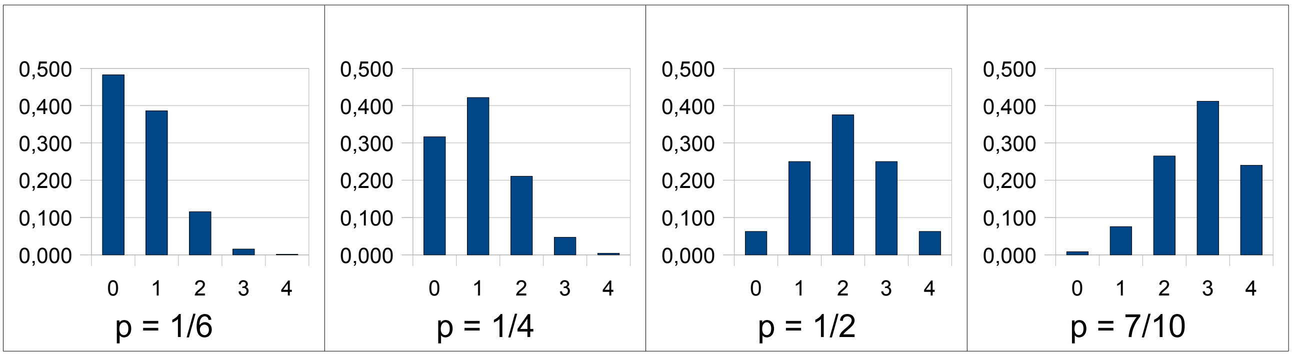
## S.4.2 Eigenschaften der Binomialverteilung

Bei der Binomialverteilung gibt es drei Parameter:

- die Anzahl der Ziehungen *n*
- die Trefferwahrscheinlichkeit *p*
- die Trefferanzahl *k*

Wie bereits oben erwähnt, schreibt man für $P(X = k)$ auch $B(n; p; k)$ oder $B_{n;p}(k)$, um alle Parameter übersichtlich angegeben zu haben.

Anhand der (graphischen) Wahrscheinlichkeitsverteilung kann man einige Eigenschaften der Binomialverteilung erkennen:




Bei festgelegter Ziehungsanzahl *n* und bei veränderlicher Trefferwahrscheinlichkeit *p* gilt:

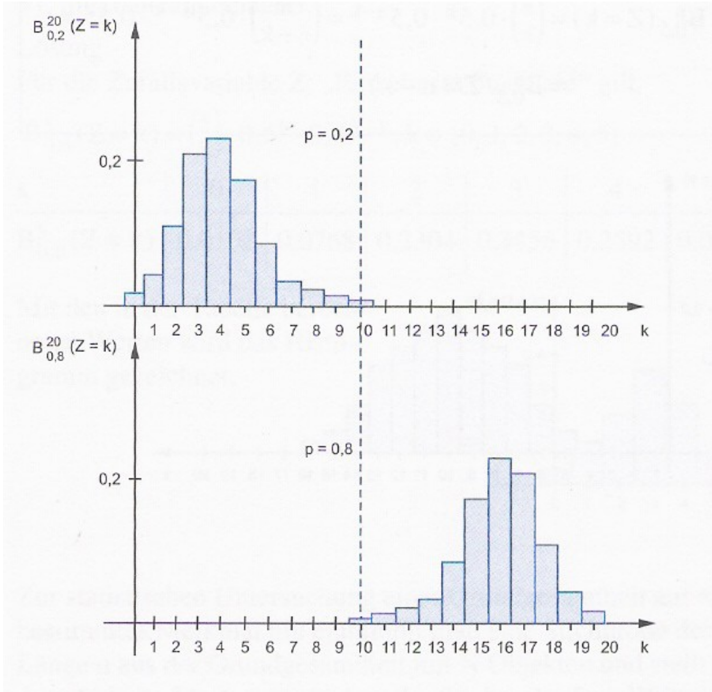
1. Je größer *p*, desto weiter rechts (bei größeren *k*) liegt das Maximum der Verteilung
2. Für *p* = 0,5 ist die Verteilung symmetrisch
3. Es gilt die Symmetriebeziehung $B(n; p; k) = B(n; 1-p; n-k)$

Eigenschaft 1 lässt sich leicht rechnerisch nachweisen. Für die Eigenschaft 2 gilt:
Es ist genauso wahrscheinlich, genau *k* Treffer zu erzielen wie genau *k* Nieten zu ziehen, da Trefferwahrscheinlichkeit und Nietenwahrscheinlichkeit gleich groß sind.
Auch die Eigenschaft 3 lässt sich recht leicht verstehen: Das Ereignis, genau *k* Treffer zu erzielen ist gleichbedeutend mit dem Ereignis, *n-k* Nieten zu ziehen.

Aus Eigenschaft 3 lässt sich folgende Eigenschaft ableiten:

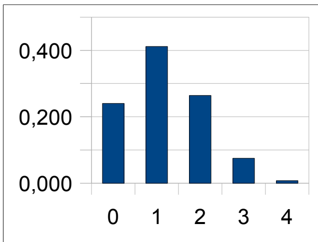
Die Verteilungen *B(n; p; k)* und *B(n; 1-p; k)* sind symmetrisch bzgl. der Geraden $k = n/2$

Da 1-*p* die "Nietenwahrscheinlichkeit" ist, trifft hier die gleiche Erklärung zu wie bei Eigenschaft 3 (es ist genau wahrscheinlich, 3 Treffer mit $p_T = 0{,}2$ zu erzielen, wie 17 Nieten mit $p_N = 0{,}8$ zu ziehen) .

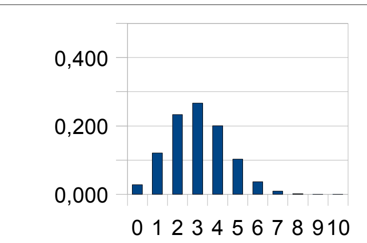



Bei gleichbleibender Trefferwahrscheinlichkeit *p* und veränderlicher Anzahl *n* gilt:

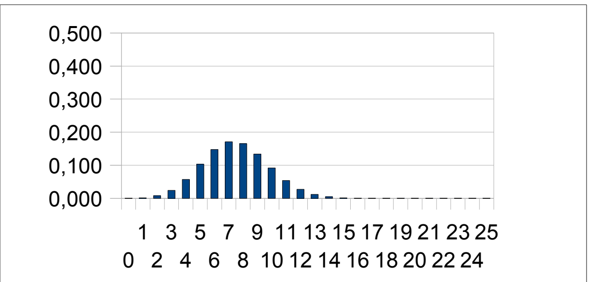
1. Mit wachsendem *n* werden die Verteilungen flacher
2. Mit wachsendem *n* werden die Verteilungen symmetrischer (wobei die Lage der Symmetrieachse [bisher] nicht näher anzugeben ist).



n = 4



n = 10



n = 25

# S.4.3 Arbeiten mit Tabellen

In manchen Aufgaben (siehe Kapitel S.4.1) müssen mehrere Wahrscheinlichkeiten berechnet werden, um zum Ergebnis zu kommen. Das sind meist die „Mindestens-“ und die „Höchstens“-Aufgaben. Um schneller an diese Ergebnisse zu gelangen, gibt es die sogenannte ***kumulierte Wahrscheinlichkeit*** *$P( X \leq k )$.* In ihr sind alle Einzel-Wahrscheinlichkeiten von $X = 0$ bis zum Wert $X = k$ aufsummiert:

$$P(X \leq k) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+\ldots+P(X=k)$$

Bezogen auf unser Beispiel mit 4maligem Würfeln und der Wahrscheinlichkeit, dabei genau $X = k$ Sechsen zu würfeln, wäre dies:

| | | |
|---|---|---|
| $P(X = 0)$ = 48,23 % | kumulierte Wahrscheinlichkeit | $P(X \leq 0)$ = 48,23 % |
| $P(X = 1)$ = 38,58 % | | $P(X \leq 1)$ = 86,81 % |
| $P(X = 2)$ = 11,57 % | | $P(X \leq 2)$ = 98,38 % |
| $P(X = 3)$ = 1,54 % | | $P(X \leq 3)$ = 99,92 % |
| $P(X = 4)$ = 0,08 % | | $P(X \leq 4)$ = 100,00 % |

Diese kumulierten Werte machen jedoch nur dann Sinn, wenn sie nicht jedes Mal neu berechnet werden müssen. Deshalb gibt es Tabellen, in denen diese kumulierte Wahrscheinlichkeit („Summenverteilung“) und auch die Wahrscheinlichkeiten der normalen Binomialverteilung aufgelistet ist.
Meist gibt es sie für „gängige“ Trefferwahrscheinlichkeiten *p* (0,05 ; 0,1 ; 1/6 ; 0,2 ; 0,25 ; 0,3 ; 1/3 ... ) und kleine Ziehungsanzahlen *n* (alle Zahlen kleiner 20; 50; 80; 100).
Aufgrund der Symmetrieüberlegungen im vorherigen Kapitel sind jedoch die Tabellen (aus Platzgründen) in zwei Richtungen zu lesen.

Achtung bei der Beschriftung der Tabellen (nicht verwechseln !) :
Binomialverteilung *P( X = k )* oder *B( n; p; k)* oder $B_{n;p}(k)$ [ *binomvert(k; n; p; 0)* ]
***Summenverteilung*** *P( X ≤ k )* oder ***F( n; p; k)*** **oder** $\mathbf{F_{n;p}(k)}$ [ *binomvert(k; n; p;* ***1****)* ]
(mit der "1" als viertem Parameter in "Excel" erhält man die Summenverteilung ! )

<u>Beispielaufgaben:</u>
(Bigalke/Köhler S 287, A 4)
Aus dem Aufgabentext entnimmt man: $p$ = 0,25 ; $n$ = 5 ; $k \leq 2$ :

In der Tabelle der Binomialverteilung liest man die Einzelwahrscheinlichkeiten ab

**Binomialverteilung**

$B(n\,;\,p\,;\,k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

| n | k | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,10 | 1/6 | 0,20 | 0,25 | 0,3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 0,9604 | 9409 | 9216 | 9025 | 8100 | 6944 | 6400 | 5625 | 490 |
| | 1 | 0392 | 0582 | 0768 | 0950 | 1800 | 2778 | 3200 | 3750 | 420 |
| | 2 | 0004 | 0009 | 0016 | 0025 | 0100 | 0278 | 0400 | 0625 | 090 |
| 3 | 0 | 0,9412 | 9127 | 8847 | 8574 | 7290 | 5787 | 5120 | 4219 | 343 |
| | 1 | 0576 | 0847 | 1106 | 1354 | 2430 | 3472 | 3840 | 4219 | 441 |
| | 2 | 0012 | 0026 | 0046 | 0071 | 0270 | 0694 | 0960 | 1406 | 189 |
| | 3 | | | 0001 | 0001 | 0010 | 0046 | 0080 | 0156 | 027 |
| 4 | 0 | 0,9224 | 8853 | 8493 | 8145 | 6561 | 4823 | 4096 | 3164 | 240 |
| | 1 | 0753 | 1095 | 1416 | 1715 | 2916 | 3858 | 4096 | 4219 | 411 |
| | 2 | 0023 | 0051 | 0088 | 0135 | 0486 | 1157 | 1536 | 2109 | 264 |
| | 3 | | 0001 | 0002 | 0005 | 0036 | 0154 | 0256 | 0469 | 075 |
| | 4 | | | | | 0001 | 0008 | 0016 | 0039 | 008 |
| 5 | 0 | 0,9039 | 8587 | 8154 | 7738 | 5905 | 4019 | 3277 | 2373 | 168 |
| | 1 | 0922 | 1328 | 1699 | 2036 | 3281 | 4019 | 4096 | 3955 | 360 |
| | 2 | 0038 | 0082 | 0142 | 0214 | 0729 | 1608 | 2048 | 2637 | 308 |
| | 3 | 0001 | 0003 | 0006 | 0011 | 0081 | 0322 | 0512 | 0879 | 132 |
| | 4 | | | | | 0005 | 0032 | 0064 | 0146 | 028 |
| | 5 | | | | | | 0001 | 0003 | 0010 | 002 |
| | 0 | 0,8858 | 8330 | 7828 | 7351 | 5314 | 3349 | 2621 | 1780 | 117 |

In der Tabelle der Summenverteilung liest man die kumulierte Wahrscheinlichkeit ab

**Kumulierte Binomialverteilung**

$F(n\,;\,p\,;\,k) = B(n\,;\,p\,;\,0) + \ldots + B(n\,;\,p\,;\,k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots$

| n | k | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,10 | 1/6 | 0,20 | 0,25 | 0,30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 0,9604 | 9409 | 9216 | 9025 | 8100 | 6944 | 6400 | 5625 | 4900 |
| | 1 | 9996 | 9991 | 9984 | 9975 | 9900 | 9722 | 9600 | 9375 | 9100 |
| 3 | 0 | 0,9412 | 9127 | 8847 | 8574 | 7290 | 5787 | 5120 | 4219 | 3430 |
| | 1 | 9988 | 9974 | 9953 | 9928 | 9720 | 9259 | 8960 | 8438 | 7840 |
| | 2 | | | 9999 | 9999 | 9990 | 9954 | 9920 | 9844 | 9730 |
| 4 | 0 | 0,9224 | 8853 | 8493 | 8145 | 6561 | 4823 | 4096 | 3164 | 2401 |
| | 1 | 9977 | 9948 | 9909 | 9860 | 9477 | 8681 | 8192 | 7383 | 6517 |
| | 2 | | 9999 | 9998 | 9995 | 9963 | 9838 | 9728 | 9492 | 9163 |
| | 3 | | | | | 9999 | 9992 | 9984 | 9961 | 9919 |
| 5 | 0 | 0,9039 | 8587 | 8154 | 7738 | 5905 | 4019 | 3277 | 2373 | 1681 |
| | 1 | 9962 | 9915 | 9852 | 9774 | 9185 | 8038 | 7373 | 6328 | 5282 |
| | 2 | 9999 | 9997 | 9994 | 9988 | 9914 | 9645 | 9421 | 8965 | 8369 |
| | 3 | | | | | 9995 | 9967 | 9933 | 9844 | 9692 |
| | 4 | | | | | | 9999 | 9997 | 9990 | 9976 |
| | 0 | 0,8858 | 8330 | 7828 | 7351 | 5314 | 3349 | 2621 | 1780 | 1176 |
| | 1 | 9943 | 9875 | 9784 | 9672 | 8857 | 7368 | 6554 | 5339 | 4202 |

Wie bereits berechnet sind die Wahrscheinlichkeiten:
*P(X=0)* = 0,2373, *P(X=1)* = 0,3955 und *P(X=2)* = 0,2367

Man liest die kumulierte (aufsummierte) Wahrscheinlichkeit ab:
*P(X≤2)* = 0,8965

(Bigalke/Köhler S 287, A 5)
Aus dem Aufgabentext entnimmt man: $p$ = 0,80 ; $n$ = 10 ; $k \geq 8$ :

Der Tabelle entnimmt man für $n$ = 10 und für $p$ = 0,80 (blau unterlegter Bereich)
*P(X = 8)* = 0,3020, *P(X = 9)* = 0,2684 und *P(X = 10)* = 0,1074
(entspricht den Werten für $p$ = 0,2 und $k$ = 0; 1; 2)

Für die kumulierte Wahrscheinlichkeit findet man *P(X ≤ 7)* den Wert 0,6778, hier gilt jedoch *F(n; p; k )* = 1 - abgelesener Wert , also 0,3222. Da hier das Gegenereignis *P(X ≥ 8)* betrachtet wird, muss wiederum 1 - 0,3222 gerechnet werden, was uns wieder zu 0,6778 bringt.

# S.5 Erwartungswerte und Abweichungen

## S.5.1 Erwartungswert

Fall 1: Bei einem Test im Mathe-Leistungskurs ergab sich folgende Notenverteilung:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 3 | 5 | 7 | 6 | 2 | 2 |

Der sogenannte Notendurchschnitt berechnet sich dabei auf folgende Art und Weise:

$$D = \frac{3\cdot 1+5\cdot 2+7\cdot 3+6\cdot 4+2\cdot 5+2\cdot 6}{25}$$

Genaugenommen ist dies jedoch nicht ein Notendurchschnitt (der Durchschnitt der Noten beträgt immer 3,5), sondern es handelt sich um einen ***gewichteten Mittelwert***, da die Einzelnoten entsprechend ihrer Häufigkeit gewichtet werden.
Im oben beschriebenen Fall ist das gewichtete Mittel 3,2 .

Fall 2: Auf einem Jahrmarkt wirst Du zu einem Spiel eingeladen: In einer Lostrommel liegen (natürlich so, dass man nicht hineinsehen kann) 100 Kugeln, die mit den Zahlen 1 bis 6 beschriftet sind. Aufgrund der unterschiedlichen Häufigkeit der einzelnen Zahlen in der Lostrommel ergibt sich folgende ***Wahrscheinlichkeitsverteilung:***

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 12% | 20% | 28% | 24% | 8% | 8% |

Du ziehst bei dem Spiel eine Kugel aus der Lostrommel und bekommst den Betrag ausbezahlt, der auf der Kugel aufgedruckt ist.

Natürlich würdest Du bei einem Einsatz von 1 Euro pro Spiel dieses Spiel mitspielen, schließlich bekommst Du zumindest Deinen Einsatz wieder zurück, wenn Du eine 1 ziehst. In allen anderen Fällen hast Du sogar einen Gewinn.

Bei einem Einsatz von 6 Euro pro Spiel wirst Du jedoch die Finger von dem Spiel lassen, da Du ja nur bei einer gezogenen 6 Deinen Einsatz wieder erhältst, ansonsten jedoch einen Verlust erleidest.

Frage: Bis zu welchem Einsatz würdest Du bei diesem Spiel mitspielen ?
Offensichtlich würdest Du nur mitspielen, wenn Du auf lange Sicht mehr gewinnen als verlieren würdest. Wo aber ist dieser Punkt, bis zu dem es sich "lohnt", mitzuspielen ?

Überlege Die dazu, welchen Auszahlungsbetrag bei 100 Spielen Du ***erwarten*** würdest.
Bei 100 Spielen erwartet man gemäß der Wahrscheinlichkeitsverteilung, dass 12mal die 1, 20mal die 2, 28mal die 3 usw. gezogen wird.

Der erwartete Auszahlungsbetrag beträgt also: $12\cdot 1+20\cdot 2+28\cdot 3+24\cdot 4+8\cdot 5+8\cdot 6=320$
Der erwartete Auszahlungsbetrag *pro Spiel* beträgt demnach 3,20 Euro.

Fazit: Bis zu einem Einsatz von 3,20 pro Spiel gewinnst Du auf lange Sicht etwas Geld, ab 3,20 Euro Einsatz gewinnt Dein Gegenüber. Bei einem Einsatz von genau 3,20 Euro gewinnt auf lange Sicht keiner Geld. Man sagt dann, das Spiel sei ***fair***.

Was haben nun Fall 1 und Fall 2 gemeinsam ?

Im Fall 1 wurden die absoluten Häufigkeiten mit den "Noten" multipliziert, aufaddiert und schließlich durch die Gesamtanzahl dividiert.

$$\begin{aligned}\frac{3\cdot 1+5\cdot 2+7\cdot 3+6\cdot 4+2\cdot 5+2\cdot 6}{25} &= \frac{3}{25}\cdot 1+\frac{5}{25}\cdot 2+\frac{7}{25}\cdot 3+\frac{6}{25}\cdot 4+\frac{2}{25}\cdot 5+\frac{2}{25}\cdot 6\\ &= 0{,}12\cdot 1+0{,}2\cdot 2+0{,}28\cdot 3+0{,}24\cdot 4+0{,}08\cdot 5+0{,}08\cdot 6\\ &= 3{,}2\end{aligned}$$

In beiden Fällen wurde also offensichtlich das selbe berechnet:
In Fall 1 war es ein gewichteter Mittelwert einer (existierenden) statistischen Erhebung.
In Fall 2 war es ein (sich auf die Zukunft beziehender) Wert, der aufgrund einer Wahrscheinlichkeitsverteilung zu erwarten ist.

Definition:

*X* sei eine Zufallsgröße mit der Wertemenge $x_1,\ \dots\ ,x_m$ und den Wahrscheinlichkeiten $P(X=x_1),\ \dots\ ,P(X=x_m)$ . Dann heißt die Zahl

$$\mu \;=\; E(X) \;=\; \sum_{i=1}^{m} x_i\cdot P(X=x_i)$$

der ***Erwartungswert*** der Zufallsgröße *X*.

Der Erwartungswert von *X* ist das gewichtete arithmetische Mittel der Elemente der Wertemenge von *X*. Als Gewichte dienen die den Elementen $x_i$ zugeordneten Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$.

Ist der Erwartungswert des ***Gewinns*** für alle Spieler ***gleich Null***, so nennt man dieses Spiel ***fair***, da dann jeder Spieler die gleichen Gewinnchancen hat.

Aufgaben:

**3.**

**a)** Betrachte das Werfen eines regulären Oktaeders. Wie groß ist der Erwartungswert der Augenzahlen?

**b)** In einer Urne sind gleichartige Kugeln, welche die Nummern 1, 2, 3, ..., m tragen. Wie groß ist der Erwartungswert der Nummer einer zufällig gezogenen Kugel?

**4.**

Bei einem Klassenfest muss jeder der 25 Teilnehmer ein Los kaufen. Der erste Preis hat einen Wert von 15 €, der zweite von 10 €, der dritte von 4 €. Außerdem gibt es noch Trostpreise im Wert von 0,50 €.
Was müsste ein Los kosten, damit Einnahmen und Ausgaben übereinstimmen?

**5.**

Beim Roulette braucht man nicht unbedingt auf eine der 37 Zahlen 0, 1, 2, ..., 36 zu setzen. Man kann z.B. auf die Farbe Rot oder die Farbe Schwarz setzen. Bleibt die Kugel auf einer der 18 roten Fächer stehen, dann erhält man das Doppelte des Einsatzes zurückgezahlt. Ist dies fair?
Berechne den Erwartungswert der Zufallsgröße X: *Gewinn beim Setzen auf Rot.*

**6.**

A und B vereinbaren, eine Münze so lange zu werfen, bis Wappen erscheint, maximal jedoch 5-mal. A zahlt an B für jeden notwendigen Wurf 1 €. Ist nach dem 5. Wurf noch kein Wappen gefallen, muss A an B den Betrag von 7 € bezahlen.

**a)** Zeichne ein Baumdiagramm und bestimme die Verteilung der Zufallsgröße X: *Betrag (in €)*, den A an B zahlen muss und deren Erwartungswert.

**b)** Wie groß muss der Einsatz von B sein, damit die Spielregel fair ist?

weitere Aufgaben:

1. Berechne den Erwartungswert beim Werfen von 2 Würfeln.

2. Gegeben ist die tabellarische Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße *X*. Bestimmen Sie den Erwartungswert.

| $x_i$ | -5 | 0 | 11 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 1/8 | 3/8 | 5/16 | 1/6 | 1/48 |

3. Spiel: Man wirft einen Würfel. Wirft man eine Primzahl, erhält man die doppelte Augenzahl ausgezahlt. Andernfalls muss man einen Betrag in Höhe der Augenzahl an die Bank zahlen.
   a) Ist das Spiel für die Bank profitabel ?
   b) Welchen Einsatz pro Spiel müsste die Bank verlangen, um das Spiel fair zu gestalten ?

4. Für einen Einsatz von 8€ darf man an folgendem Spiel teilnehmen:
   Eine Urne enthält 6 rote und 4 schwarze Kugeln. Es werden drei Kugeln mit einem Griff gezogen. Sind unter den gezogenen Kugeln mindestens 2 rote Kugeln, so erhält man 10€ ausgezahlt. Es soll geprüft werden, ob das Spiel fair ist.
   a) *X* sei die Anzahl der gezogenen roten Kugeln. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße *X* auf.
   b) *Y* sei der Gewinn pro Spiel (Auszahlung minus Einsatz). Stellen Sie die

Wahrscheinlichkeitsverteilung von *Y* auf und berechnen Sie den Erwartungswert von *Y*.

c) Wie muss der Einsatz verändert werden, damit ein faires Spiel entsteht ?

## S.5.2 Erwartungswert der Binomialverteilung

Im Abschnitt S.4.2 wurde über das Aussehen einer Binomialverteilung diskutiert. Allerdings wurde noch nicht weiter betrachtet, wo diese Verteilung ihr Maximum hat. Es ist jedoch jedem sofort klar, dass bei einem Bernoulli-Experiment der Länge *n* = 100 und einer Trefferwahrscheinlichkeit von *p* = 0,3 „im Schnitt" 30 Treffer ***erwartet*** werden. Tatsächlich ist es so, dass bei einer ***binomialverteilten*** Zufallsgröße *X* der Erwartungswert

$$\boxed{\mu = E(X) = n \cdot p}$$

ist. Der Erwartungswert liegt dabei immer in der **Nähe** des wahrscheinlichsten Wertes (und somit in der Nähe des Maximums der graphischen Darstellung).

Beispiel: *n* = 3; *p* = 0,3 ;
*P(X* = 0*)* = 34,3 %
*P(X* = 1*)* = 44,1 % Der Erwartungswert liegt bei $n \cdot p = 3 \cdot 0{,}3 = 0{,}9$
*P(X* = 2*)* = 18,9 %
*P(X* = 3*)* = 2,7 % Der Erwartungswert muss keine ganze Zahl sein !

Man kann die Formel *E(X)* = *np* natürlich auch aus der allgemeinen Definition aus dem vorherigen Abschnitt herleiten:

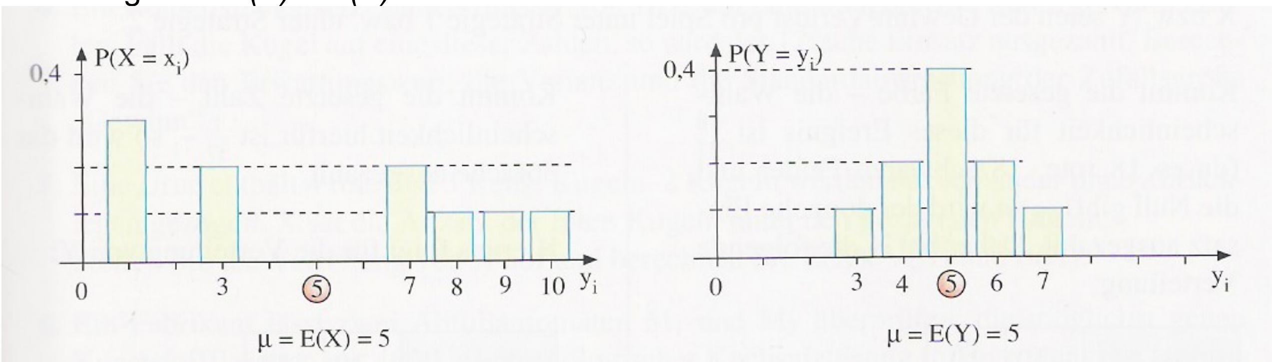
$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} && \text{| Binomialkoeff. ausführlich} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} && \text{| np vorklammern} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} k \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} && \text{| k kürzen} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} && \text{| zu Binomialkoeff. zs-fassen} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} && \text{| Substitution } k-1=l \\
&= np \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^{l} (1-p)^{(n-1)-l} && \text{| Substitution } n-1=m \\
&= np \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} p^{l} (1-p)^{m-l} && \text{| Summe einer Binomialvert. } =1 \\
&= np
\end{aligned}$$

Diese Herleitung soll nur nachvollzogen werden können. Sie ist nicht prüfungsrelevant !

## S.5.3 Varianz und Standardabweichung

Ist von einer Wahrscheinlichkeitsverteilung nur der Erwartungswert bekannt, kann nicht auf die Verteilung bzw. auf deren Aussehen geschlossen werden.

Als Beispiel seien hier folgende zwei Verteilungen angegeben, die den gleichen Erwartungswert *E(X)* = *E(Y)* = 5 haben:




Offensichtlich liegen die Wahrscheinlichkeiten der Zufallsgröße *Y* sehr viel dichter am Erwartungswert als bei der Zufallsgröße *X*.

Um dieses ***Streuverhalten*** zu charakterisieren, sind offensichtlich die Abweichungen $|x_1-\mu|$ , $|x_2-\mu|$ , $\ldots$ gut geeignet. In der Praxis verwendet man jedoch deren Quadrate $(x_1-\mu)^2$ , $(x_2-\mu)^2$ , $\ldots$ , $(x_n-\mu)^2$ . Wird dann noch jede einzelne quadratische Abweichung mit der Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens $P(X = x_i)$ multipliziert und diese alle aufsummiert, so erhält man die Summe der gewichteten quadratischen Abweichungen. Dieses Streuungsmaß wird als ***Varianz*** bezeichnet. Die Wurzel aus der Varianz nennt man die ***Standardabweichung***, die ebenfalls ein sehr gebräuchliches Streuungsmaß darstellt.

Definition:
*X* sei eine Zufallsgröße mit der Wertemenge $x_1, \ldots, x_m$ , den Wahrscheinlichkeiten $P(X=x_1), \ldots, P(X=x_m)$ und dem Erwartungswert $\mu = E(X)$. Dann heißt die Zahl

$$VarX = V(X) = \sum_{i=1}^{m} (x_i-\mu)^2 \cdot P(X=x_i)$$

die ***Varianz*** der Zufallsgröße *X*.
Die Quadratwurzel aus der Varianz $\sigma = \sqrt{V(X)}$ heißt ***Standardabweichung*** der Zufallsgröße *X*. Entsprechend wird die Varianz oft auch als $\sigma^2$ bezeichnet.

Für das einführende Beispiel gilt:

$$V(X)=(1-5)^2\cdot 0{,}3+(3-5)^2\cdot 0{,}2+(7-5)^2\cdot 0{,}2+(8-5)^2\cdot 0{,}1+(9-5)^2\cdot 0{,}1+(10-5)^2\cdot 0{,}1=\ldots=11{,}4$$

Dementsprechend beträgt die Standardabweichung $\sigma_X=3{,}38$ .

$$V(Y)=(3-5)^2\cdot 0{,}1+(4-5)^2\cdot 0{,}2+(5-5)^2\cdot 0{,}4+(6-5)^2\cdot 0{,}2+(7-5)^2\cdot 0{,}1=\ldots=1{,}2$$

Hier beträgt die Standardabweichung lediglich $\sigma_Y=1{,}095$ .

Durch das Quadrieren der Abweichungen fallen die vom Mittelwert „weit entfernten“ Werte natürlich sehr stark ins Gewicht, was sich auch in der hier aufgeführten Rechnung zeigt. Dass es sinnvoll ist, die Standardabweichung ebenfalls einzuführen, zeigt folgendes

Beispiel: Wäre die Zufallsgröße *X* der Gewinn in €, dann hätte die Varianz aufgrund der Quadrate die Einheit €², d.h. die Standardabweichung hat dann wieder € als Einheit.

<u>Aufgaben:</u>

1. *X* sei die Augenzahl beim Werfen eines Würfels. Berechne $\mu$, $V(X)$ und $\sigma$.

2. Vergleiche mit $\mu$, $V(X)$ und $\sigma$ unseres "Lego-Würfels".

3. *X* sei die Augensumme beim Werfen zweier Würfel. Berechne $\mu$, $V(X)$ und $\sigma$

## S.5.4 Standardabweichung bei der Binomialverteilung

Die Varianz und die Standardabweichung bei der Binomialverteilung lässt sich ebenso einfach berechnen wie der Erwartungswert (auf die Herleitung wird dieses Mal verzichtet):

Die ***Varianz einer Binomialverteilung*** berechnet sich zu

$$\boxed{Var(X) = V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Wegen der bekannten Beziehung $\sigma = \sqrt{V(X)}$ , die hier natürlich auch Bestand hat, berechnet sich die ***Standardabweichung*** zu:

$$\boxed{\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$$

Die Standardabweichung gibt dabei die ***Breite*** einer Binomialverteilung an.

Wie bereits in Kapitel S.4.2 beschrieben, werden die Binomialverteilungen mit wachsender Anzahl *n* immer symmetrischer. Für sehr große *n* und besonders für den Grenzfall $n \to \infty$ gilt, dass sich die Binomialverteilung der sog. ***Glockenkurve*** einer ***Normalverteilung*** annähert.

Für diese Normalverteilung gibt es die sogenannten ***σ - Regeln***, die jedoch auch für Binomialverteilungen gelten, sofern *n* groß genug ist. Diese lauten:

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße *X* mit der Standardabweichung $\sigma$ und dem Erwartungswert $\mu$ gilt:

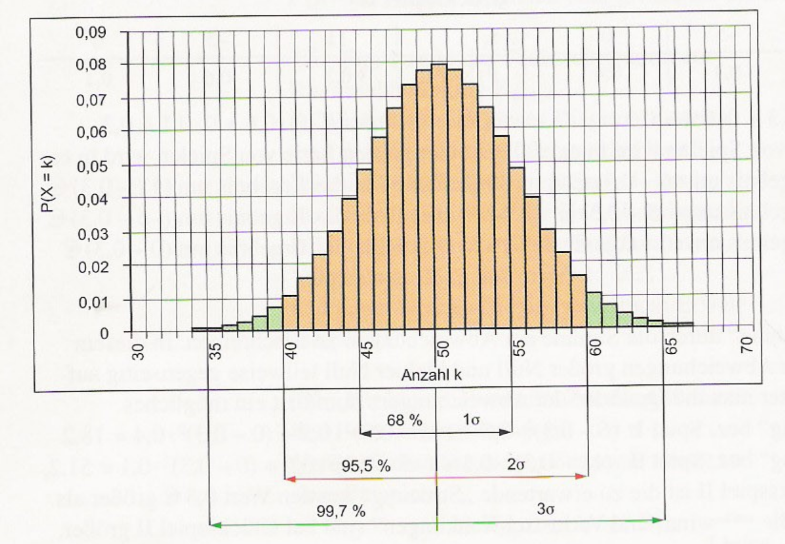
$$P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) \approx 0{,}680$$
$$P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) \approx 0{,}955$$
$$P(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma) \approx 0{,}997$$

Die Näherung wird umso besser, je größer *n* ist. In der Regel verlangt man $\sigma > 3$.

Was sagen uns diese 3 Formeln über unsere Binomialverteilung aus ?

Bei einer (langen) Bernoulli-Kette der Länge *n* liegen 68% der Ergebnisse im Intervall [ $\mu - \sigma$ ; $\mu + \sigma$ ] oder anders ausgedrückt: Mit 68%iger Wahrscheinlichkeit liegt das erzielte Ergebnis einer Stichprobe in diesem kleinen Intervall. Im Intervall [ $\mu - 2\sigma$ ; $\mu + 2\sigma$ ] liegen bereits 95,5% der Ergebnisse, im Intervall [ $\mu - 3\sigma$ ; $\mu + 3\sigma$ ] fast alle (99,7%) Ergebnisse. Nur einzelne "Ausreißer" sind mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3% außerhalb dieses Intervalls zu finden.

Als Beispiel dient hier eine binomialverteilte Zufallsgröße *X* mit *n* = 100 und *p* = 0,5 . Der Erwartungswert ist $\mu = n \cdot p = 50$ und die Standardabweichung beträgt $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{25} = 5$ :




Ausblick:
In der beurteilenden Statistik (Kap. II) benötigt man Intervalle um den Erwartungswert $\mu$, in denen die Werte der binomialverteilten Zufallsgrößen mit vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten liegen. Es gilt:

| Wahrscheinlichkeit | Radius des Intervalls |
|---|---|
| 0,80 | $1{,}28\,\sigma$ |
| 0,90 | $1{,}64\,\sigma$ |
| 0,95 | $1{,}96\,\sigma$ |
| 0,975 | $2{,}33\,\sigma$ |
| 0,99 | $2{,}58\,\sigma$ |

Die $\sigma$-Regeln lassen sich mit dem zentralen Grenzwertsatz („gaußsche Glockenfunktion“, vgl. Kap. III und VI) begründen.

<u>Aufgaben:</u>

**3** Berechne $\mu$, $\sigma^2$ und $\sigma$ einer $B_{n;p}$-verteilten Zufallsvariablen X mit

a) $n = 1200$; $p = 0{,}6$ b) $n = 667$; $p = \frac{1}{5}$ c) $n = 175$; $p = 0{,}91$ d) $n = 26\,400$; $p = 0{,}53$
e) $n = 10^3$; $p = 0{,}08$ f) $n = 108$; $p = \frac{3}{4}$ g) $n = 500$; $p = 0{,}01$ h) $n = 20$; $p = 0{,}7$.

**4** Eine Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit dem Erwartungswert $\mu$ und der Standardabweichung $\sigma$. Berechne n und p für

a) $\mu = 20$; $\sigma = 4$ b) $\mu = \frac{10}{3}$; $\sigma = \frac{2}{3}\sqrt{5}$ c) $\mu = 75$; $\sigma = 7{,}5$ d) $\mu = \frac{2000}{6}$; $\sigma = \frac{100}{6}$
e) $\mu = 400$; $\sigma = 4\sqrt{15}$ f) $\mu = 60$; $\sigma = 3\sqrt{5}$ g) $\mu = 125$; $\sigma = \frac{5}{2}\sqrt{15}$ h) $\mu = 1{,}6$; $\sigma = \sqrt{1{,}28}$

# S.6 Testen von Hypothesen

Eine statistische Gesamtheit - also z.B. die Bevölkerung eines Staates, der Produktionsausstoß einer Maschine, der Inhalt einer Schraubenschachtel - kann Merkmale besitzen, deren Häufigkeitsverteilung nicht genau bekannt ist, über die man aber ***Vermutungen*** hat.

Da man schlecht die komplette Gesamtheit überprüfen kann, erhebt man eine ***Stichprobe***, um mit relativ kleinem Aufwand die Vermutungen - auch ***Hypothesen*** genannt - zu überprüfen.

Eine solche ***Überprüfung*** von Hypothesen kann allerdings auch zu ***Fehleinschätzungen*** führen, da eine zufällige Stichprobe durchaus ein falsches Bild der tatsächlichen Häufigkeitsverteilung widerspiegeln kann. Deshalb wird in diesem Kapitel das ***Risiko*** solcher Fehleinschätzungen untersucht.

## S.6.1 Alternativtest

Viele Menschen leiden unter Bluthochdruck. Nun gibt es einige Mittel auf dem Markt, die bei etwa 60% der Patienten helfen. Von einem neuen Medikament wird behauptet, dass 80% der Patienten von ihrem Leiden befreit werden können. Um die Wirksamkeit des neuen Medikamentes zu untersuchen, sollen 20 zufällig ausgewählte Patienten mit dem neuen Mittel behandelt werden, ohne dass sie es wissen, um psychologische Effekte zu unterdrücken.

a) Angenommen, das neue Medikament hat wirklich eine Heilungsrate von 80%, dann ist bei $n = 20$ Patienten und $p = 0{,}8$ mit $\mu = np = 16$ Heilungen zu rechnen.
Bei mehr als 16 geheilten Patienten spricht das natürlich für die aufgestellte Behauptung. Aber es könnten ja (zufälligerweise) nur 15 oder weniger Patienten geheilt werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wäre das der Fall ?

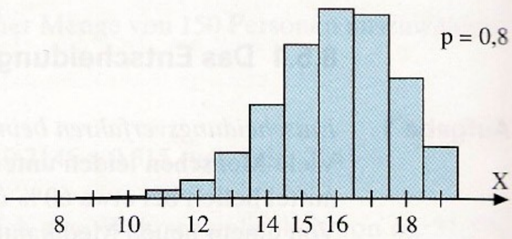
b) Angenommen, das Medikament hat wie all die anderen Medikamente nur eine Heilungsrate von 60%, dann ist bei $n = 20$ Patienten und $p = 0{,}6$ mit $\mu = np = 12$ geheilten Patienten zu rechnen. Bei weniger als 12 geheilten Patienten spräche das natürlich für diese Hypothese. Was aber ist, wenn zufälligerweise 13 oder mehr Patienten durch dieses Mittel geheilt werden ? Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit ?

Bevor man diesen Zufallsversuch durchführt, muss man sich also entscheiden, bei welcher Zahl von geheilten Patienten man welche Hypothese für wahr ansieht.
Wir wollen hier folgende Entscheidungsregel treffen:
Falls 15 oder mehr Patienten geheilt werden ( Ereignis $X \geq 15$ ), dann soll $p = 0{,}8$ für richtig gehalten werden, andernfalls ( Ereignis $X \leq 14$ ) soll $p = 0{,}6$ für wahr angesehen werden. Man nennt die beiden sich ausschließenden Hypothesen auch ***Nullhypothese $H_0$*** (hier: $p = 0{,}8$ ist wahr) und ***Alternativhypothese $H_1$*** ($p = 0{,}6$ ist wahr).

Welche Fehler sind nun bei dieser Vorgehensweise möglich, und wie wahrscheinlich sind diese Fehler ?

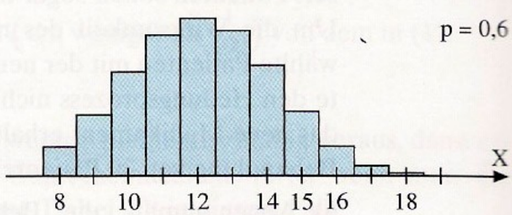
**Lösung**

**a)** Wir deuten den Vorgang als 20-stufigen BERNOULLI-Versuch mit $p = 0{,}8$.
Die Wahrscheinlichkeiten entnehmen wir den Tabellen kumulierter Wahrscheinlichkeiten (vgl. Seite 502).




$P_{0,8}(X \le 15) = 0{,}370$
$P_{0,8}(X \le 14) = 0{,}196$
$P_{0,8}(X \le 13) = 0{,}087$
$P_{0,8}(X \le 12) = 0{,}032$

**b)** Entsprechend berechnen wir für $n = 20$, $p = 0{,}6$:




$P_{0,6}(X \ge 13) = 0{,}416$
$P_{0,6}(X \ge 14) = 0{,}250$
$P_{0,6}(X \ge 15) = 0{,}126$
$P_{0,6}(X \ge 16) = 0{,}051$
$P_{0,6}(X \ge 17) = 0{,}016$

**c)** *1. Fall: $p = 0{,}8$ ist richtig*, d.h.
das neue Medikament ist besser als die bisher verwendeten.
Zufällig kann es aber vorkommen, dass weniger als 15 Patienten geheilt werden. Dann würde man das neue und bessere Medikament nicht als besser erkennen.
Zu einem solchen Fehler käme es in 19,6% der Fälle ($P_{0,8}(X \le 14) = 0{,}196$). Das heißt: Wenn man einen solchen Zufallsversuch mit 20 Personen sehr oft durchführen würde, könnte man in 19,6% der Fälle ein Versuchsergebnis erwarten, das gegen die tatsächliche Qualität des neuen Medikaments spricht.

*Fehler: Das bessere Medikament wird nicht für besser gehalten.*

*2. Fall: $p = 0{,}6$ ist richtig*, d.h.
das neue Medikament ist auch nicht besser als die bisher verwendeten.
Zufällig kann es aber vorkommen, dass trotzdem 15 oder mehr Patienten geheilt werden. Wegen dieser Heilungserfolge würde man fälschlicherweise das neue Medikament als besser ansehen.
Zu einem solchen Fehler käme es in 12,6% der Fälle ($P_{0,6}(X \ge 15) = 0{,}126$). Das heißt: Wenn man einen solchen Zufallsversuch mit 20 Personen sehr oft durchführen würde, könnte man in 12,6% der Fälle ein Versuchsergebnis erwarten, das ein neues, aber nicht besseres Medikament empfiehlt.

*Fehler: Das schlechtere Medikament wird für besser gehalten.*

Die Grenze (15 oder mehr Patienten) wurde oben ***willkürlich*** gewählt. Den Bereich $X \ge 15$ nennt man ***Annahmebereich A*** der Nullhypothese $p = 0{,}8$ , der Bereich $X \le 14$ heißt dementsprechend ***Verwerfungsbereich V*** der Nullhypothese $p = 0{,}8$ . Beide Bereiche werden durch den ***kritischen Wert*** getrennt. (Umgekehrt ist natürlich der Bereich $X \ge 15$ der Verwerfungsbereich und $X \le 14$ der Annahmebereich der Alternativhypothese $p = 0{,}6$).

Aufgrund der Versuchsergebnisse einer durchgeführten Stichprobe können also, wie oben berechnet, Entscheidungen zugunsten beider Hypothesen fallen; es können jedoch auch Entscheidungen fallen, die falsch sind:

| | Versuchsergebnis im Annahmebereich ( $X \geq 15$ ) | Versuchsergebnis im Verwerfungsbereich ( $X \leq 14$ ) |
|---|---|---|
| Hypothese $p$ = 0,8 wahr | Entscheidung richtig | Entscheidung falsch<br>***Fehler 1. Art*** |
| Hypothese $p$ = 0,8 falsch | Entscheidung falsch<br>***Fehler 2. Art*** | Entscheidung richtig |

Der Fehler, eine wahre Hypothese zu verwerfen, heißt ***Fehler 1. Art*** (oder manchmal auch ***α-Fehler***). Der Fehler, eine falsche Hypothese nicht zu verwerfen und stattdessen anzunehmen, heißt ***Fehler 2. Art*** (oder manchmal auch ***β-Fehler***).

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art nennt man deswegen auch $\boldsymbol{\alpha}$. Laut Rechnung oben ist in diesem Beispiel $\alpha$ = 19,6%. Analog nennt man die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art $\boldsymbol{\beta}$. Sie beträgt im obigen Beispiel $\beta$ = 12,6 %.

Aufgaben:

1) Berechne (analog zu oben) $\alpha$ und $\beta$, wenn der kritische Wert 14, 16 bzw. 17 beträgt. Weshalb wurde wohl im Beispiel mit einem kritischen Wert von 15 gerechnet ?

2) Der Medikamententest wird mit 50 Patienten durchgeführt. Berechne $\alpha$ und $\beta$ für einen kritischen Wert von 35 (Annahmebereich für $p$ = 0,8 für $X \geq 35$).

3) Es wird angenommen, dass eine Münze gezinkt ist und eine Wahrscheinlichkeit für Wappen von $p$ = 0,6 besitzt (Nullhypothese). Die Alternativhypothese lautet $p$ = 0,5 (normale Münze). Bestimme $\alpha$ und $\beta$ zur Entscheidungsregel: Nimm die Hypothese $H_0$ für wahr an, falls bei mehr als 55% der $n$ = 10 (20, 50, 100) Würfe Wappen auftritt.

4) Was ändert sich an Aufg. 3, wenn Null- und Alternativhypothese die Wahrscheinlichkeiten $p_0$ = 0,8 bzw. $p_1$ = 0,3 hätten ?

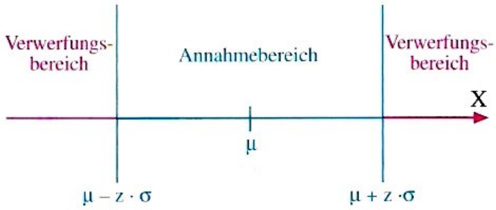
Wie der Rechnung zu Aufgabe 2 zu entnehmen ist, ist die Fehlerwahrscheinlichkeit bei einer größeren Stichprobe geringer. Dies deckt sich auch mit unserer alltäglichen Erfahrung.

Bei den Aufgabe 3 und 4 wird ein anderer Effekt sichtbar: Sind die Wahrscheinlichkeiten der beiden Hypothesen recht nahe beieinander, ist auch die Fehlerwahrscheinlichkeit recht hoch, selbst noch bei $n$ = 100. Liegen die Hypothesenwahrscheinlichkeiten jedoch weit auseinander, dann wird selbst bei kleineren Stichproben der Wert für $\alpha$ und $\beta$ fast Null.

# S.6.2 Signifikanztest

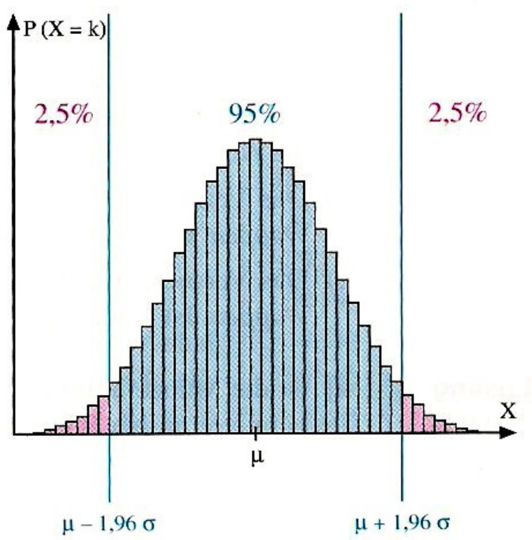
In den meisten Fällen gibt es jedoch keine zwei Alternativen, zwischen denen auszuwählen ist. Meist gibt es eine Hypothese, deren Wahrscheinlichkeit durch eine Stichprobe verifiziert oder widerlegt werden soll. Ein solcher Test ist der ***Signifikanztest***.

Die Wahrscheinlichkeit dieser ***Nullhypothese $H_0$*** ist $p_0$. Diese Hypothese wird als wahr angenommen, wenn das Ergebnis einer Stichprobe innerhalb eines bestimmten ***Annahmebereichs*** liegt. Liegt das Ergebnis jedoch im ***Verwerfungsbereich***, ist die Hypothese aufzugeben. Natürlich gibt es auch hier wiederum die Möglichkeit, dass aufgrund der stochastischen Eigenschaften einer Stichprobe ***Fehler*** in der Einschätzung auftauchen. So kann z.B. die Nullhypothese aufgrund der Stichprobe abgelehnt werden, obwohl sie eigentlich zutrifft, wenn das Ergebnis (zufälligerweise) im Verwerfungsbereich zu finden ist (***Fehler 1. Art***, analog zum Alternativtest). Ebenso ist es denkbar, dass die Hypothese angenommen wird, da das Ergebnis (zufälligerweise) im Annahmebereich gelandet ist, obwohl die Hypothese gar nicht zutrifft (***Fehler 2. Art***, analog zu oben). Die sogenannte ***Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha$*** ( = $P$(Fehler 1. Art) ) ist natürlich von der Größe des Annahmebereichs abhängig.
Bei einem (hier behandelten) ***zweiseitigen Signifikanztest*** liegt der Annahmebereich (bei einer Binomialverteilung mit genügend großem $n$) symmetrisch um den Erwartungswert $\mu$.




Die Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha$ nennt man auch ***Signifikanzniveau***, da Werte, die in den Verwerfungsbereich fallen (also Irrtümer), signifikant vom Erwartungswert abweichen. Da es sich hier um einen zweiseitigen Test handelt, wird der Annahmebereich so gelegt, dass rechts und links des Erwartungswertes die Hälfte der Irrtumswahrscheinlichkeit auftritt.

<u>Beispiel:</u>
Liegt das Signifikanzniveau α bei 5%, so wird der Annahmebereich so gewählt, dass die beiden Verwerfungsbereiche jeweils eine Wahrscheinlichkeit von 2,5% haben. Hierzu liegt der Annahmebereich symmetrisch zu $\mu$ und bildet das Intervall [ $\mu$ - 1,96$\sigma$ ; $\mu$ + 1,96$\sigma$ ] (siehe Abbildung rechts).



Wie groß muss nun dieser Vorfaktor vor der Standardabweichung $\sigma$ (meist $z$ genannt) sein, um verschiedene Signifikanzniveaus zu realisieren ?

| Signifikanzniveau | Stichprobenergebnis liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von ...% im Annahmebereich | $z$ |
|---|---|---|
| 32% | 68% | 1 (vgl. Kap 5) |
| 10% | 90% | 1,64 |
| 5% | 95% | 1,96 |
| 4,5% | 95,5% | 2 (vgl. Kap 5) |
| 1% | 99% | 2,58 |
| 0,3% | 99,7% | 3 (vgl. Kap 5) |

Der Verwerfungsbereich besteht bei einem zweiseitigen Signifikanztest aus zwei Teilen, nämlich der Menge { 0 , 1 , 2 , .... , $K_1$ } und der Menge { $K_2$ , $K_2$ + 1 , .... , $n$ }. Die beiden Zahlen $\boldsymbol{K_1}$ und $\boldsymbol{K_2}$ nennt man analog zum Alternativtest ***kritische Zahlen***. Für sie gilt:

$P(X \leq K_1) = \frac{\alpha}{2}$ und $P(X \geq K_2) = \frac{\alpha}{2}$

Ein (zweiseitiger) Signifikanztest läuft fast immer nach dem gleichen Schema ab:

1. Wie lautet die Nullhypothese ?
2. Wie groß sind Stichprobenumfang $n$ und Signifikanzniveau $\alpha$ ?
3. Bestimme den Annahmebereich (bzw. die Verwerfungsbereiche)
4. Entscheidung: Hypothese wird beibehalten, wenn Stichprobenergebnis innerhalb des Annahmebereichs liegt, ansonsten abgelehnt.

<u>Beispiel:</u>
Der Oberbürgermeister einer Stadt erhielt bei der letzten Wahl 59% der Stimmen. Er gibt eine Meinungsumfrage mit einem Stichprobenumfang von 1000 in Auftrag. In welchem Bereich müsste die Anzahl der Zustimmungen liegen, damit die Hypothese "Seine Popularität hat sich nicht geändert" beibehalten werden kann ? Rechne mit einem Signifikanzniveau von 5%.

1. $p_0 = 0{,}59$

2. $n = 1000$, $\alpha = 5\%$
   Daraus berechnet sich der Erwartungswert $\mu = n \cdot p_0 = 590$ und die Standard-abweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 15{,}553$

3. Der Annahmebereich ergibt sich bei einem Signifikanzniveau von 5% zu
   [ $\mu$ - 1,96$\sigma$ ; $\mu$ + 1,96$\sigma$ ] = [ 559,52 ; 620,48 ]
   Da keine "halben" Stimmen zu erwarten sind, ist der Annahmebereich folglich das Intervall [ 560 ; 620 ]  (nicht runden, die berechneten Werte sind als Grenzen zwischen den natürlichen Zahlen zu sehen)
   Die Verwerfungsintervalle sind folglich [ 0 ; 559 ] und [ 621 ; 1000 ]
   ($K_1$ ist also 559, $K_2$ ist 621)

4. Liegt das Stichprobenergebnis (das in diesem Beispiel nicht angegeben ist) im Annahmebereich, so wird die Hypothese beibehalten, ansonsten abgelehnt.

<u>2. Beispiel:</u>
Es wird behauptet, dass 10% einer Bevölkerung die Blutgruppe B haben. Bei einem Test mit 100 Personen findet man 19 mit der Blutgruppe B. Wie wird bei einem Signifikanzniveau von 5% entschieden ?

1. $p_0 = 0{,}1$
2. $n = 100$, $\alpha = 5\%$
   $\Rightarrow \mu = n \cdot p_0 = 10$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 3$ (mit dieser Standardabweichung sind die Näherungen auch erlaubt !)
3. $[\ \mu - 1{,}96\sigma\ ;\ \mu + 1{,}96\sigma\ ] = [\ 4{,}12\ ;\ 15{,}88\ ]$
   Annahmebereich [ 5 ; 15 ] (Achtung bei den Grenzen, nicht runden !)
4. Da das Ergebnis der Stichprobe (19) im Verwerfungsbereich liegt, wird die Hypothese abgelehnt.

Auch wenn der Faktor $z$, mit dem die Standardabweichung multipliziert werden muss, nicht bekannt ist, kann der Annahmebereich (bzw. der Verwerfungsbereich) berechnet werden. Man nutzt hierzu die Tatsache, dass die Irrtumswahrscheinlichkeit rechts und links des Annahmebereichs gleich groß ist, und zwar $\alpha/2$ .

Mit Hilfe der Tabellen zur kumulierten Binomialverteilung können somit die kritischen Werte $K_1$ und $K_2$ bestimmt werden.

Für $K_1$ gilt: $P(X \leq K_1)\ \leq\ \alpha/2 \quad \Leftrightarrow \quad F_{n;p}(K_1)\ \leq\ \alpha/2$
d.h. $K_1$ kann direkt in der Tabelle nachgeschlagen werden.

Für $K_2$ gilt: $P(X \geq K_2)\ \leq\ \alpha/2$
da jedoch die Tabelle eine „höchstens“-Tabelle ist, muss dies umgeschrieben werden zu
$P(X < K_2)\ \geq\ 1-\alpha/2$
(Achtung: Gegenwahrscheinlichkeit ! Deswegen <u>echt</u> kleiner als $K_2$)
Somit ist
$P(X \leq K_2 - 1)\ \geq\ 1-\alpha/2 \quad \Leftrightarrow \quad F_{n;p}(K_2-1)\ \geq\ 1-\alpha/2$

<u>Beispiel:</u>

$p_0 = 1/6$ ; $n = 100$ ; $\alpha = 5\%$ (Überprüfung, ob ein Würfel "korrekt" ist)

Der linke, kritische Wert muss unter einer kumulierten Wahrscheinlichkeit von 2,5% liegen.
Man liest aus der Tabelle ab:
$k = 9$: 0213 (← letzter Wert unter 0,025)
$k = 10$: 0427
Der linke kritische Wert ist also die 9, d.h. der linke Verwerfungsbereich ist [ 0 ; 9 ]

Der rechte kritische Wert liegt so, dass die kumulierte Wahrscheinlichkeit seines Vorgängers größer als 97,5% ist (2,5% liegen im linken Verwerfungsbereich, 95% im Annahmebereich). Man liest wieder ab:
*k* = 23: 9621
*k* = 24: 9783 (← erster Wert über 0,975)
*k* = 25: 9881
Der letzte Wert im Annahmebereich ist also die 24. d.h. der rechte kritische Wert ist die 25 und der rechte Verwerfungsbereich ist [ 25 ; 100 ]

Mit der Sigma-Regel rechnet man nach:

$\Rightarrow \mu = n \cdot p_0 = 16{,}7$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 3{,}727$

Mit [ $\mu$ - 1,96$\sigma$ ; $\mu$ + 1,96$\sigma$ ] = [ 9,395 ; 24,005 ] ist der Annahmebereich also [ 10 ; 24 ], was der obigen Lösung entspricht.

<u>Übungsaufgaben:</u>

Lambacher Schweizer Stochastik: Seite 42, Aufgaben 3 bis 6 (Folie / Kopie)

# Zusammenfassung

<u>Zufallsexperiment</u> mit Ergebnismenge $\Omega$
Ereignis *A*: Teilmenge von $\Omega$

<u>Gesetz der großen Zahlen:</u> relative Häufigkeit ———► Wahrscheinlichkeit *P(A)*,
wenn *n* „genügend“ groß

<u>LAPLACE-Experiment:</u> alle Elementarereignisse (= Elemente von $\Omega$) haben die gleiche Wahrscheinlichkeit. Dann gilt:

$$P(A)=\frac{\text{Anzahl der Elemente in } A}{\text{Anzahl der Elemente in } \Omega}$$

<u>mehrstufige Zufallsexperimente:</u>

—► Baumdiagramm **_Pfadregel_**: 1. Entlang eines Pfades: multiplizieren
2. *P(A)* = Summe der Pfade, die zu *A* gehören

—► Urnenmodell Ziehen von Kugeln mit / ohne Zurücklegen.
( ! ) Beim Ziehen <u>ohne</u> Zurücklegen ändern sich beim nächsten Zug die Wahrscheinlichkeiten

**_Stichproben_**: *n* Kugeln , *k* Ziehungen (*k* ≤ *n* für Ziehungen <u>ohne</u> Zurücklegen)

| Anzahl der Möglichkeiten | geordnet | ungeordnet |
|---|---|---|
| mit Zurücklegen | $n^k$ | (nicht ausführlich behandelt) |
| ohne Zurücklegen | $\frac{n!}{(n-k)!}$ (Vollerhebung (*k*=*n*): *n*!) | $\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$ (Division durch *k*! (Anzahl der Permutationen), da Reihenfolge irrelevant) |

<u>bedingte Wahrscheinlichkeit:</u> Wahrscheinlichkeit *P(B)* ist **_abhängig_** vom Ausgang des vorherigen Zufallsexperiments

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

demgegenüber: **_<u>un</u>abhängig_** <=> $P_B(A)=P(A)$
oder $P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$

zur Berechnung verschiedener Wahrscheinlichkeiten nützlich: **_4-Felder-Tafel_**

Bernoulli-Experiment: ist eine Experiment mit nur 2 möglichen Ausgängen (T und N)
*P(T) = p* *P(N)* = 1 - *p*

*n*-fach: ***Kette*** der Länge *n* (mit Zurücklegen !)

*k*: Anzahl der Treffer T ($k \leq n$)

Wahrscheinlichkeit für *k* Treffer: $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Wahrscheinlichkeiten und ***kumulierte*** Wahrscheinlichkeiten können in ***Tabellen*** nachgeschlagen werden.

Erwartungswert***:*** $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot P(X=x_i)$ und für Binomialvert.: $\mu = E(X) = n \cdot p$ .

Ist der Erwartungswert des Gewinns Null (für alle Beteiligten), dann ist das Spiel ***fair***.

Standardabweichung***:*** $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X=x_i)$ bzw. $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Alternativtest: Nullhypothesen und Alternativhypothese, ***Annahmebereich*** der Nullhypothese ist ***Verwerfungsbereich*** der Alternativhypothese und umgekehrt. Beide werden getrennt durch den ***kritischen Wert K***. Dabei können Fehler 1. Art und 2. Art gemacht werden: Ihre Wahrscheinlichkeiten heißen $\alpha$ und $\beta$.

Fehler 1. Art: Hypothese wird verworfen, obwohl sie wahr ist.
Fehler 2. Art: Hypothese wird angenommen, obwohl sie falsch ist.

Signifikanztest (zweiseitig): bei Binomialverteilungen. Nullhypothese mit Signifikanzniveau α (= Irrtumswahrscheinlichkeit bzw. Wahrscheinlichkeit, einen Fehler 1. Art zu begehen).
2 kritische Werte $K_1$ und $K_2$ trennen die Verwerfungsbereiche vom Annahmebereich.
Beide Verwerfungsbereiche sind gleich groß. Annahmebereich wird berechnet mit
[ $\mu - z\sigma$ ; $\mu + z\sigma$ ] oder mit Hilfe der kumulierten Tabelle bestimmt.